В. В. ПРАСОЛОВ

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

Издательство МЦНМО
Москва 2010

УДК 514.112
ББК 22.151.0
П70

Прасолов В. В.

П70 Задачи по стереометрии: Учебное пособие. — М.: МЦНМО, 2010. — 352 с.: ил.

978-5-94057-605-1

В книгу включено около 800 задач по стереометрии, снабжённых подробными решениями. Большинство задач по своей тематике относится к школьной программе. Уровень их трудности в основном несколько выше обычных школьных задач, и есть также некоторое количество весьма трудных задач, предназначенных для учащихся математических классов. Задачи разбиты на циклы, связанные общей идеей решения. Внутри каждого цикла задачи расположены в порядке возрастания трудности. Такое разбиение поможет читателю ориентироваться в большом наборе задач и даст ему возможность разобраться непосредственно в заинтересовавшей его теме, не читая подряд всю книгу.

Для школьников, преподавателей математики, руководителей математических кружков, студентов педагогических институтов и университетов.

ББК 22.151.0

ISBN 978-5-94057-605-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга вместе с изданными ранее книгами «Задачи по планиметрии»[1] и «Задачи по алгебре, арифметике и анализу»[2] составляет единый сборник задач по математике для учащихся физико-математических классов. В нём представлены практически все темы по математике, которые изучаются в школе в специализированных классах. Основу этого сборника задач составляют задачи из журнала «Квант», задачи, в разное время предлагавшиеся на математических олимпиадах, и задачи из архивов математических олимпиад и математических кружков.

В этой книге, как и в двух предыдущих, тоже принята подробная рубрикация. Задачи разбиты на 22 главы, каждая из которых состоит из нескольких параграфов. За основу классификации были приняты методы решения задач, но во многих случаях задачи пришлось описать по внешним признакам. Главная цель этого подробного разбиения — помочь читателю ориентироваться в таком большом собрании задач. Книга снабжена подробным предметным указателем, который служит той же цели.

При решении стереометрических задач часто используются некоторые факты из планиметрии. При ссылке на такие факты указывается номер соответствующей задачи в книге «Задачи по планиметрии» (М.: МЦНМО, 2007).

Электронные версии этой книги и двух упомянутых выше сборников имеются в Интернете по адресу `http://www.mccme.ru/prasolov/`. В электронной версии будут исправляться замеченные ошибки и опечатки.

---

[1] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2006.
[2] *Прасолов В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М.: МЦНМО, 2007.

ГЛАВА 1

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Основные сведения

Две прямые в пространстве называют *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Две плоскости в пространстве называют *параллельными*, если они не пересекаются.

Прямую и плоскость называют *параллельными*, если они не пересекаются.

Замечание. Удобно также считать параллельными совпадающие прямые (плоскости); прямую, принадлежащую плоскости, тоже удобно считать параллельной ей. В дальнейшем мы будем придерживаться именно этих определений.

Две прямые в пространстве называют *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

§ 1. Пересечения прямых и плоскостей

1.1. Дано несколько прямых, причём любые две из них пересекаются. Докажите, что либо все они лежат в одной плоскости, либо все они проходят через одну точку.

1.2. Всегда ли через данную точку A можно провести прямую, пересекающую данные скрещивающиеся прямые l_1 и l_2?

1.3. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не лежат в одной плоскости. Известно, что прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 попарно пересекаются.

а) Докажите, что точки пересечения этих прямых лежат на одной прямой.

б) Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

1.4. Докажите, что существует бесконечно много прямых, пересекающих одновременно три данные попарно скрещивающиеся прямые a, b и c.

§ 2. Углы между скрещивающимися прямыми

1.5. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба.

1.6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1B и AC_1.

§ 3. Угол между прямой и плоскостью

Для прямой l, не перпендикулярной и не параллельной плоскости Π, *угол* между этой прямой и плоскостью — это угол между ней и её ортогональной проекцией на плоскость Π. Если $l \perp \Pi$, то угол между прямой и плоскостью прямой, а если $l \parallel \Pi$, то угол между прямой и плоскостью нулевой.

1.7. Пусть прямая l пересекает плоскость Π в точке O. Докажите, что угол между прямой l и плоскостью Π — это наименьший из углов между прямой l и прямыми, расположенными в плоскости Π.

1.8. В пространстве даны две пересекающиеся плоскости α и β. На линии их пересечения дана точка A. Докажите, что из всех прямых, лежащих в плоскости α и проходящих через точку A, наибольший угол с плоскостью β образует та, которая перпендикулярна к линии пересечения плоскостей α и β.

§ 4. Прямые, образующие равные углы с прямыми и плоскостями

1.9. Прямая l образует равные углы с двумя пересекающимися прямыми l_1 и l_2, лежащими в плоскости Π, причём она не перпендикулярна этой плоскости. Докажите, что проекция прямой l на плоскость Π тоже образует равные углы с прямыми l_1 и l_2.

1.10. Докажите, что прямая l образует равные углы с двумя пересекающимися прямыми тогда и только тогда, когда она перпендикулярна одной из двух биссектрис углов между этими прямыми.

1.11. Плоскости Π_1 и Π_2 пересекаются по прямой l. В этих плоскостях выбраны точки A_1 и A_2. Докажите, что прямая A_1A_2 образует равные углы с плоскостями Π_1 и Π_2 тогда и только тогда, когда точки A_1 и A_2 равноудалены от прямой l.

1.12. Докажите, что прямая l, образующая попарно равные углы с тремя попарно пересекающимися прямыми, лежащими в плоскости Π, перпендикулярна этой плоскости.

1.13. Докажите, что для любых трёх прямых, не лежащих в одной плоскости, найдётся прямая, которая образует с ними равные углы. Сколько именно таких прямых можно провести через данную точку?

См. также задачу 1.16.

§ 5. Скрещивающиеся прямые

1.14. Докажите, что для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обеим прямым.

Отрезок из задачи 1.14 (и прямую, на которой он лежит) называют *общим перпендикуляром* к двум скрещивающимся прямым.

1.15. Даны три попарно скрещивающиеся прямые a, b и c, не параллельные одной плоскости. Докажите, что существует единственный отрезок, параллельный прямой c, концы которого лежат на прямых a и b.

1.16. На скрещивающихся прямых l_1 и l_2 выбраны точки O_1, A_1 и O_2, A_2 так, что O_1O_2 — общий перпендикуляр к этим скрещивающимся прямым. Докажите, что прямая A_1A_2 образует равные углы с прямыми l_1 и l_2 тогда и только тогда, когда $O_1A_1 = O_2A_2$.

1.17. Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Докажите, что существует единственный параллелепипед, три ребра которого лежат на этих прямых.

1.18. Даны три скрещивающиеся прямые. Докажите, что они будут общими перпендикулярами к своим общим перпендикулярам.

1.19. На общем перпендикуляре O_1O_2 к скрещивающимся прямым l_1 и l_2 взята точка A. Точка X_1 движется по прямой l_1, а точка X_2 — это проекция точки X_1 на прямую l_2. Докажите, что все плоскости AX_1X_2 имеют общую прямую.

Расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 — это наименьшее из расстояний между точками A_1 и A_2, где точка A_1 лежит на прямой l_1, а точка A_2 лежит на прямой l_2.

1.20. Докажите, что расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 равно длине их общего перпендикуляра A_1A_2.

1.21. Докажите, что расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию от точки A, в которой прямая l_1 пересекает перпендикулярную ей плоскость Π, до проекции прямой l_2 на плоскость Π.

1.22. Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно плоскости ABC. Пусть M — середина ребра BD, N — середина ребра AB, а точка K делит ребро CD в отношении $CK:KD=1:2$. Докажите, что прямая CN равноудалена от прямых AM и BK.

§ 6. Теорема Пифагора в пространстве

1.23. Прямая l образует с тремя попарно ортогональными прямыми углы α, β и γ. Докажите, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

1.24. Внутри шара радиуса R взята точка A на расстоянии a от его центра. Через точку A проведены три попарно перпендикулярные хорды.

а) Найдите сумму квадратов длин этих хорд.

б) Найдите сумму квадратов длин отрезков хорд, на которые их делит точка A.

1.25. Докажите, что сумма квадратов длин проекций рёбер куба на любую плоскость равна $8a^2$, где a — длина ребра куба.

1.26. Докажите, что сумма квадратов длин проекций рёбер правильного тетраэдра на любую плоскость равна $4a^2$, где a — длина ребра тетраэдра.

1.27. Дан правильный тетраэдр с ребром a. Докажите, что сумма квадратов длин проекций (на любую плоскость) отрезков, соединяющих его центр с вершинами, равна a^2.

§ 7. Метод координат

1.28. Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для любой точки X в пространстве выполняется равенство $AX^2+CX^2=BX^2+DX^2$.

1.29. Даны две точки A и B. Докажите, что множество точек X, для которых величина AX^2-BX^2 постоянна, представляет собой плоскость, перпендикулярную прямой AB.

1.30. Даны две точки A и B и положительное число $k\neq 1$. Найдите геометрическое место таких точек M, что $AM:BM=k$.

1.31. Найдите геометрическое место таких точек X, что $pAX^2 + qBX^2 + rCX^2 = d$, где A, B и C — данные точки, p, q, r и d — данные числа, причём $p+q+r=0$.

1.32. Оси двух конусов, у которых равны углы между осью и образующей, параллельны. Докажите, что все точки пересечения их поверхностей лежат в одной плоскости.

1.33. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Докажите, что расстояние от любой точки пространства до одной из прямых AA_1, B_1C_1, CD не меньше $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

1.34. На трёх взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке O, даны точки A, B и C, равноудаленные от O. Пусть l — произвольная прямая, проходящая через O; точки A_1, B_1 и C_1 симметричны A, B и C относительно l. Плоскости, проходящие через точки A_1, B_1 и C_1 перпендикулярно прямым OA, OB и OC соответственно, пересекаются в точке M. Найдите геометрическое место точек M.

1.35. Докажите, что пересечение трёх прямых круговых цилиндров радиуса 1, оси которых попарно взаимно перпендикулярны (но не обязательно пересекаются), содержится в некотором шаре радиуса $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

* * *

1.36. Докажите, что расстояние от точки с координатами (x_0, y_0, z_0) до плоскости, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$, равно

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

1.37. Докажите, что квадрат расстояния от точки (x_0, y_0, z_0) до прямой, заданной уравнениями

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c},$$

равен

$$\frac{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ c & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ a & b \end{vmatrix}^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

См. также задачи 4.30, 8.75, 10.2, 10.14, 10.18, 11.8, 11.18, 11.19, 11.27, 11.28, 11.42, 12.7, 14.7, 12.35, 12.37, 16.5, 16.7, 16.15.

Решения

1.1. Предположим, что три данные прямые a, b и c не лежат в одной плоскости. Тогда прямая c может пересекать прямые a и b только в их точке пересечения. Если бы прямая d пересекала прямые a, b и c в точках, отличных от их общей точки, то прямые a, b и c лежали бы в одной плоскости.

1.2. Рассмотрим плоскость Π_1, содержащую точку A и прямую l_1, и плоскость Π_2, содержащую точку A и прямую l_2. Эти плоскости не совпадают (поскольку прямые l_1 и l_2 скрещивающиеся) и имеют общую точку A, поэтому они пересекаются по некоторой прямой l. Если прямая l не параллельна ни одной из прямых l_1 и l_2, то она искомая. В противном случае искомой прямой не существует. Действительно, искомая прямая должна лежать как в плоскости Π_1, так и в плоскости Π_2, поэтому она должна совпадать с прямой l. Но прямая l параллельна одной из прямых l_1 и l_2, поэтому она её не пересекает.

1.3. а) Точки пересечения указанных прямых принадлежат прямой, по которой пересекаются плоскости треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

б) Прямые AB и A_1B_1 пересекаются, поэтому точки A, B, A_1, B_1 лежат в одной плоскости. Аналогично точки A, C, A_1, C_1 лежат в одной плоскости и точки B, C, B_1, C_1 тоже лежат в одной плоскости. Эти три плоскости пересекаются по прямым AA_1, BB_1 и CC_1. Рассматриваемые три плоскости либо имеют общую точку (и тогда указанные прямые пересекаются в этой точке), либо не имеют общей точки (и тогда указанные прямые параллельны).

1.4. Через прямую a проходит одна плоскость, параллельная прямой b, и одна плоскость, параллельная прямой c. Проведём через прямую a произвольную плоскость, отличную от этих двух плоскостей (или одной плоскости, если прямые a, b и c параллельны одной плоскости). Она пересекает прямые b и c в точках B_1 и C_1. Если прямая B_1C_1 не параллельна прямой a, то эта прямая искомая. Но прямая B_1C_1 может оказаться параллельной прямой a не более чем для одной проведённой плоскости. Действительно, если B_2C_2 — ещё одна такая прямая, то прямые B_1C_1 и B_2C_2 параллельны прямой a, поэтому они лежат в одной плоскости. Но тогда прямые b и c лежат в одной плоскости. Приходим к противоречию.

Замечание. В зависимости от того, параллельны прямые a, b и c одной плоскости или нет, прямые, которые пересекают их одновременно, заметают либо однополостный гиперболоид, либо гиперболический параболоид (см. задачи 21.14 и 21.15).

1.5. Найдём угол между диагоналями AB_1 и DB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Этот угол равен углу между прямыми AB_1 и B_1D_1, поскольку $B_1D_1 \parallel BD$. Треугольник AB_1D_1 равносторонний, поэтому $\angle AB_1D_1 = 60^\circ$.

1.6. Треугольник A_1BD равносторонний, причём точка A равноудалена от его вершин и точка C_1 тоже равноудалена от его вершин. Поэтому прямая

AC_1 перпендикулярна плоскости этого треугольника. В частности, она перпендикулярна прямой A_1B.

1.7. Достаточно рассмотреть случай, когда прямая m (отличная от проекции прямой l на плоскость Π) расположена в плоскости Π и проходит через точку O. Пусть A — точка прямой l, отличная от точки O, A' — проекция точки A на плоскость Π. Выберем на прямой m точку B так, что $OA' = OB$. Ясно, что $AB > AA'$, поскольку наклонная длиннее перпендикуляра. В треугольниках AOB и AOA' сторона AO общая, $OB = OA'$ и $AB > AA'$, поэтому $\angle AOB > \angle AOA'$.

1.8. Пусть l — прямая, лежащая в плоскости α и проходящая через точку A. Отложим на прямой l отрезок AB длины 1. Пусть B' — проекция точки B на плоскость β, O — проекция точки B на линию пересечения плоскостей α и β. Тогда $\sin\angle BAB' = BB' = OB\sin\angle BOB'$. При этом $\sin\angle BOB'$ — синус угла между плоскостями α и β (этот угол фиксирован) и $OB \leqslant AB$, причём равенство достигается лишь в том случае, когда точка O совпадает с A. Поэтому $\sin\angle BAB'$ максимален, когда прямая l перпендикулярна к линии пересечения плоскостей α и β.

1.9. Достаточно рассмотреть случай, когда прямая l проходит через точку O, в которой пересекаются прямые l_1 и l_2. Выберем на прямой l точку A, отличную от точки O, и рассмотрим её проекции A_1, A_2 и A' на прямые l_1, l_2 и на плоскость Π. Из равенства углов $\angle AOA_1$ и $\angle AOA_2$ следует, что $OA_1 = OA_2$. По теореме о трёх перпендикулярах $A'A_1 \perp OA_1$ и $A'A_2 \perp OA_2$. Прямоугольные треугольники $OA'A_1$ и $OA'A_2$ имеют общую гипотенузу и равные катеты OA_1 и OA_2. Следовательно, $A_1A' = A_2A'$, а значит, $\angle A'OA_1 = \angle A'OA_2$.

З а м е ч а н и е. Из решения видно также, что верно и обратное утверждение: если проекция прямой l на плоскость Π образует равные углы с прямыми l_1 и l_2, то и сама прямая l образует равные углы с прямыми l_1 и l_2.

1.10. Пусть Π — плоскость, содержащая данные пересекающиеся прямые. Случай, когда прямая l перпендикулярна этой плоскости, очевиден, поэтому будем считать, что они не перпендикулярны. Согласно задаче 1.9 проекция l' прямой l на плоскость Π является одной из двух биссектрис между данными прямыми. Прямая l' перпендикулярна другой биссектрисе, а потому по теореме о трёх перпендикулярах прямая l тоже перпендикулярна другой биссектрисе.

1.11. Прямая A_1A_2 образует равные углы с плоскостями Π_1 и Π_2 тогда и только тогда, когда она образует равные углы с прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Согласно задаче 1.10 последнее условие эквивалентно тому, что прямая A_1A_2 перпендикулярна одной из двух биссектрис между этими прямыми, т. е. она параллельна одной из двух биссекторных плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями Π_1 и Π_2. Но плоскость, параллельная биссекторной плоскости, пересекает плоскости Π_1 и Π_2 по двум прямым, равноудалённым от прямой l.

1.12. Можно считать, что три данные прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке. Согласно задаче 1.10 прямая l перпендикулярна каким-то трём биссектрисам углов между этими прямыми. Но биссектриса угла между прямыми l_1 и l_2 не может совпадать с биссектрисой угла между прямыми l_2 и l_3. Следовательно, прямая l перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости Π, поэтому она перпендикулярна плоскости Π.

1.13. Ответ: 4 прямых. Можно считать, что данные прямые пересекаются в одной точке. Пусть a_1 и a_2 — биссектрисы углов между первой и второй прямой, b_1 и b_2 — биссектрисы углов между второй и третьей прямой. Согласно задаче 1.10 прямая образует равные углы с тремя данными прямыми тогда и только тогда, когда она перпендикулярна некоторой паре прямых a_i и b_j, т. е. перпендикулярна плоскости, содержащей эти прямые. Всего есть 4 различные пары прямых a_i и b_j. Все плоскости, заданные парами этих прямых, различны, потому что прямая a_i не может лежать в плоскости, содержащей прямые b_1 и b_2.

1.14. Пусть прямая l перпендикулярна прямым l_1 и l_2. Проведём через прямую l_1 плоскость, параллельную прямой l. Точка пересечения этой плоскости с прямой l_2 является одним из концов требуемого отрезка; сам этот отрезок параллелен прямой l.

1.15. Проведём через прямую a плоскость Π, параллельную прямой c. Эта плоскость пересекает прямую b в некоторой точке B. Прямая, проходящая через точку B параллельно прямой c, лежит в плоскости Π, поэтому она пересекает прямую a в некоторой точке A. Отрезок AB искомый.

1.16. Проведём через точку O_2 прямую l_1', параллельную прямой l_1. Проведём плоскость Π, содержащую прямые l_2 и l_1', и рассмотрим проекцию A_1' точки A_1 на эту плоскость. Согласно задаче 1.9 прямая A_1A_2 образует равные углы с прямыми l_2 и l_1' тогда и только тогда, когда прямая $A_1'A_2$ образует равные углы с прямыми l_2 и l_1'. Последнее условие эквивалентно тому, что $O_2A_2 = O_2A_1' = O_1A_1$.

1.17. Проведём через каждую из данных прямых две плоскости: плоскость, параллельную одной из оставшихся прямых, и плоскость, параллельную другой из оставшихся прямых. Эти плоскости задают искомый параллелепипед.

1.18. Пусть $a' \perp b$ и $a' \perp c$, $b' \perp c$ и $b' \perp a$, $c' \perp a$ и $c' \perp b$. Тогда $a \perp b'$ и $a \perp c'$, $b \perp c'$ и $b \perp a'$, $c \perp a'$ и $c \perp b'$.

1.19. Проведём через точку O_1 прямую l_2', параллельную прямой l_2, а через точку O_2 — прямую l_1', параллельную прямой l_1. Опустим из точки X_1 перпендикуляры X_1' и X_2' на прямые l_1' и l_2'. Ясно, что $X_1X_2'X_2X_1'$ — прямоугольник. Пусть плоскость, проведённая через точку A параллельно прямым l_1 и l_2', пересекает диагональ X_1X_2 в точке X, а стороны X_1X_1' и X_2X_2' — в точках Y_1 и Y_2. Тогда $Y_1X : XY_2 = Y_1X_1 : X_2Y_2 = AO_1 : O_2A$, поэтому прямая AX одна и та же для всех точек X_1.

1.20. Пусть A_1' и A_2' — точки прямых l_1 и l_2, причём отрезок $A_1'A_2'$ не совпадает с отрезком A_1A_2. Проведём через прямую l_1 плоскость, параллельную прямой l_2, а через прямую l_2 — плоскость, параллельную прямой l_1. Эти плоскости параллельны, и расстояние между ними равно длине отрезка A_1A_2. Концы отрезка $A_1'A_2'$ лежат на этих параллельных плоскостях, причём он не может быть им перпендикулярен, потому что иначе он был бы вторым общим перпендикуляром к прямым l_1 и l_2. Следовательно, длина отрезка $A_1'A_2'$ больше расстояния между рассматриваемыми параллельными плоскостями, т. е. $A_1'A_2' > A_1A_2$.

1.21. Проведём через прямую l_1 плоскость Π_1, параллельную прямой l_2, а через прямую l_2 — плоскость Π_2, параллельную прямой l_1. Эти плоскости параллельны, и расстояние между ними равно расстоянию между прямыми l_1 и l_2. Прямая l, по которой пересекаются плоскости Π_2 и Π, — это проекция прямой l_2 на плоскость Π. Расстояние от точки A до прямой l равно расстоянию между плоскостями Π_1 и Π_2, поэтому оно равно расстоянию между прямыми l_1 и l_2.

1.22. Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную прямой CN; проекцию точки X будем обозначать X_1. Треугольник $A_1D_1B_1$ равнобедренный, причём K_1 — точка пересечения его медиан, C_1 и M_1 — середины сторон A_1B_1 и B_1D_1. Поэтому прямые A_1M_1 и B_1K_1 являются продолжениями медиан равнобедренного треугольника, а значит, точка C_1 равноудалена от них. Следовательно, согласно задаче 1.21 прямая CN равноудалена от прямых AM и BK.

1.23. Введём систему координат, направив её оси параллельно трём данным перпендикулярным прямым. Возьмём на прямой l вектор $\boldsymbol{v}$ единичной длины. Вектор $\boldsymbol{v}$ имеет координаты (x, y, z), где $x = \pm\cos\alpha$, $y = \pm\cos\beta$ и $z = \pm\cos\gamma$. Поэтому $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = x^2 + y^2 + z^2 = |\boldsymbol{v}|^2 = 1$.

1.24. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, рёбра которого параллельны данным хордам, а точка A и центр O шара являются его противоположными вершинами. Пусть a_1, a_2 и a_3 — длины его рёбер; ясно, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2$.

а) Если хорда удалена на расстояние x от центра шара, то квадрат её длины равен $4R^2 - 4x^2$. Так как расстояния от данных хорд до точки O равны диагоналям граней параллелепипеда, то искомая сумма квадратов равна $12R^2 - 4(a_2^2 + a_3^2) - 4(a_1^2 + a_3^2) - 4(a_1^2 + a_2^2) = 12R^2 - 8a^2$.

б) Если длина хорды равна d, а точка A находится на расстоянии a от её середины, то сумма квадратов длин отрезков хорды, на которые она делится точкой A, равна $2a^2 + \frac{d^2}{2}$. Так как расстояния от точки A до середин данных хорд равны a_1, a_2 и a_3, а сумма квадратов длин хорд равна $12R^2 - 8a^2$, то искомая сумма квадратов равна $2a^2 + (6R^2 - 4a^2) = 6R^2 - 2a^2$.

1.25. Пусть α, β и γ — углы между рёбрами куба и прямой, перпендикулярной данной плоскости. Тогда длины проекций рёбер куба на эту плоскость принимают значения $a\sin\alpha$, $a\sin\beta$ и $a\sin\gamma$, причём каждое значение принимается ровно 4 раза. Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (задача 1.23), то $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$. Поэтому искомая сумма квадратов равна $8a^2$.

1.26. Проведём через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. В результате получим куб, в который вписан данный тетраэдр, причём ребро куба равно $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Проекция каждой грани куба является параллелограммом, диагонали которого равны проекциям рёбер тетраэдра. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон. Поэтому сумма квадратов длин двух противоположных рёбер тетраэдра равна сумме квадратов длин проекций двух пар противоположных рёбер куба. Следовательно, сумма квадратов проекций рёбер тетраэдра равна сумме квадратов проекций рёбер куба, т. е. она равна $4a^2$.

1.27. Как и в задаче 1.26, будем считать, что вершины тетраэдра AB_1CD_1 расположены в вершинах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$; длина ребра этого куба равна $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Пусть O — центр тетраэдра. Отрезки OA и OD_1 являются половинами диагоналей параллелограмма ABC_1D_1, поэтому сумма квадратов их проекций равна четверти суммы квадратов проекций сторон этого параллелограмма. Аналогично сумма квадратов проекций отрезков OC и OB_1 равна четверти суммы квадратов проекций сторон параллелограмма A_1B_1CD. Заметим, далее, что сумма квадратов проекций диагоналей параллелограммов AA_1D_1D и BB_1C_1C равна сумме квадратов проекций их сторон. В итоге получаем, что искомая сумма квадратов равна четверти суммы квадратов проекций рёбер куба, т. е. равна a^2.

1.28. Введём систему координат с началом в вершине A и осями AB и AD. Пусть вершина C имеет координаты (a, b). Тогда вершины B и D имеют координаты $(a, 0)$ и $(0, b)$. Если точка X имеет координаты (x, y, z), то $AX^2 + CX^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2$ и $BX^2 + DX^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y-b)^2 + z^2$.

1.29. Введём систему координат, выбрав точку A в качестве начала координат и направив ось Ox по лучу AB. Пусть точка X имеет координаты (x, y, z). Тогда $AX^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и $BX^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2$, где $a = AB$. Поэтому $AX^2 - BX^2 = 2ax - a^2$. Уравнение $2ax - a^2 = c$ задаёт плоскость, перпендикулярную оси Ox.

1.30. Введём систему координат так, чтобы точки A и B имели координаты $(-a, 0, 0)$ и $(a, 0, 0)$ соответственно. Если точка M имеет координаты (x, y, z), то $\dfrac{AM^2}{BM^2} = \dfrac{(x+a)^2 + y^2 + z^2}{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$. Уравнение $AM : BM = k$ приводится к виду

$$\left(x + \frac{1+k^2}{1-k^2}a\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{2ka}{1-k^2}\right)^2.$$

Это уравнение является уравнением сферы с центром $\left(-\dfrac{1+k^2}{1-k^2}a, 0, 0\right)$ и радиусом $\left|\dfrac{2ka}{a-k^2}\right|$.

1.31. Введём систему координат, направив ось Oz перпендикулярно плоскости ABC. Пусть точка X имеет координаты (x, y, z). Тогда, например, $AX^2 =$

$= (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + z^2$. Поэтому для координат точки X получаем уравнение вида $(p+q+r)(x^2+y^2+z^2) + \alpha x + \beta y + \delta = 0$, т. е. $\alpha x + \beta y + \delta = 0$, поскольку $p+q+r=0$. Это уравнение задаёт плоскость, перпендикулярную плоскости ABC (в вырожденных случаях оно задаёт пустое множество или всё пространство).

1.32. Пусть ось конуса параллельна оси Oz; его вершина имеет координаты (a, b, c); α — угол между осью конуса и образующей. Тогда точки поверхности конуса удовлетворяют уравнению

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2(z-c)^2,$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$. Разность двух уравнений

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = k^2(z-c_1)^2$$

и

$$(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = k^2(z-c_2)^2$$

является линейным уравнением; все общие точки конических поверхностей лежат в плоскости, заданной этим уравнением.

1.33. Введём систему координат, направив оси Ox, Oy и Oz по лучам AB, AD и AA_1. Прямая AA_1 задаётся уравнениями $x=0$, $y=0$; прямая CD — уравнениями $y=a$, $z=0$; прямая B_1C_1 — уравнениями $x=a$, $z=a$. Поэтому квадраты расстояний от точки с координатами (x, y, z) до прямых AA_1, CD и B_1C_1 равны x^2+y^2, $(y-a)^2+z^2$ и $(x-a)^2+(z-a)^2$ соответственно. Все эти числа не могут быть одновременно меньше $\dfrac{a^2}{2}$, так как $x^2+(x-a)^2 \geqslant \dfrac{a^2}{2}$, $y^2+(y-a)^2 \geqslant \dfrac{a^2}{2}$ и $z^2+(z-a)^2 \geqslant \dfrac{a^2}{2}$. Все эти числа равны $\dfrac{a^2}{2}$ для точки с координатами $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$, т. е. для центра куба.

1.34. Направим оси координат по лучам OA, OB и OC. Пусть прямая l образует с этими осями углы α, β и γ соответственно. Координаты точки M равны координатам проекций точек A_1, B_1 и C_1 на оси Ox, Oy и Oz соответственно, т. е. они равны $a\cos 2\alpha$, $a\cos 2\beta$ и $a\cos 2\gamma$, где $a = |OA|$. Так как $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - 3 = -1$ (см. задачу 1.23) и $-1 \leqslant \cos 2\alpha, \cos 2\beta, \cos 2\gamma \leqslant 1$, то искомое ГМТ состоит из точек пересечения куба, заданного неравенствами $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant a$, с плоскостью $x+y+z = -a$; эта плоскость проходит через вершины с координатами $(a, -a, -a)$, $(-a, a, -a)$ и $(-a, -a, a)$.

1.35. Проведём через ось каждого цилиндра две плоскости, параллельные осям двух других цилиндров. Эти плоскости задают прямоугольный параллелепипед. Поместим начало координат в его центр, а оси координат направим по осям цилиндров. Тогда оси цилиндров задаются уравнениями $x=a$, $y=-b$; $y=b$, $z=-c$; $z=c$, $x=-a$. Поэтому точка (x, y, z) принадлежит пересечению цилиндров тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$(x-a)^2 + (y+b)^2 \leqslant 1, \quad (y-b)^2 + (z+c)^2 \leqslant 1, \quad (z-c)^2 + (x+a)^2 \leqslant 1.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$(x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2+c^2) \leqslant \frac{3}{2}.$$

Следовательно, $x^2+y^2+z^2 \leqslant \frac{3}{2}$, т. е. все точки пересечения принадлежат шару радиуса $\sqrt{\frac{3}{2}}$ с центром в центре построенного параллелепипеда.

1.36. Пусть (x_1, y_1, z_1) — основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость. Вектор (a, b, c) перпендикулярен данной плоскости (задача 11.5), поэтому $x_1 = x_0 + \lambda a$, $y_1 = y_0 + \lambda b$ и $z_1 = z_0 + \lambda c$, причём искомое расстояние равно $|\lambda|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Точка (x_1, y_1, z_1) лежит в данной плоскости, значит,

$$a(x_0+\lambda a)+b(y_0+\lambda b)+c(z_0+\lambda c)+d=0,$$

т. е. $\lambda = -\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$.

1.37. Данная прямая задаётся параметрически следующим образом:

$$x(t)=x_0+at, \quad y(t)=y_0+bt, \quad z(t)=z_0+ct.$$

Квадрат расстояния между точками (x_0, y_0, z_0) и $(x(t), y(t), z(t))$ равен

$$(a^2+b^2+c^2)t^2+2(a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1))t+$$
$$+(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2.$$

Нас интересует наименьшее значение квадрата расстояния. Выделяя полный квадрат, находим, что оно равно

$$(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2-\frac{(a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1))^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

После несложных преобразований получаем требуемое выражение.

ГЛАВА 2

ПРОЕКЦИИ, СЕЧЕНИЯ, РАЗВЁРТКИ

§ 1. Вспомогательные проекции

2.1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть M — точка пересечения диагонали AC_1 с плоскостью A_1BD. Докажите, что $AM = \frac{AC_1}{3}$.

2.2. Углы, образованные сторонами правильного треугольника с некоторой плоскостью, равны α, β и γ. Докажите, что одно из чисел $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ равно сумме двух других.

2.3. В основании пирамиды лежит многоугольник с нечётным числом сторон. Можно ли на её рёбрах так расставить стрелки, что сумма полученных векторов будет равна нулю?

2.4. Плоскость, проходящая через середины рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$, пересекает рёбра AD и BC в точках L и N. Докажите, что $BC : CN = AD : DL$.

2.5. В пространстве даны точки A, A_1, B, B_1, C, C_1, не лежащие в одной плоскости, причём векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ сонаправлены. Плоскости ABC_1, AB_1C и A_1BC пересекаются в точке P, а плоскости A_1B_1C, A_1BC_1 и AB_1C_1 — в точке P_1. Докажите, что $PP_1 \parallel AA_1$.

2.6. Даны плоскость Π и точки A и B вне её. Найдите геометрическое место точек X плоскости Π, для которых прямые AX и BX образуют равные углы с плоскостью Π.

2.7. Докажите, что сумма длин рёбер выпуклого многогранника больше $3d$, где d — наибольшее расстояние между его вершинами.

2.8. В тетраэдре $ABCD$ высота DP наименьшая. Докажите, что точка P принадлежит треугольнику, стороны которого проходят через вершины треугольника ABC параллельно его противоположным сторонам.

См. также задачи 1.22, 11.30, 15.12, 15.13, 15.29.

§ 2. Теорема о трёх перпендикулярах

2.9. Пусть прямая l не перпендикулярна плоскости Π. Докажите, что её проекция l' на плоскость Π перпендикулярна прямой l_1, лежащей в этой плоскости, тогда и только тогда, когда $l' \perp l_1$ (*теорема о трёх перпендикулярах*).

2.10. Докажите, что диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости A_1BD тогда и только тогда, когда этот параллелепипед является кубом.

2.11. Докажите, что противоположные рёбра правильного тетраэдра перпендикулярны.

2.12. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит многоугольник $A_1 \ldots A_{2n-1}$. Докажите, что ребро SA_1 перпендикулярно ребру A_nA_{n+1}.

2.13. Докажите, что противоположные рёбра тетраэдра попарно перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из его высот проходит через точку пересечения высот грани, на которую она опущена (тогда и все остальные высоты проходят через точки пересечения высот граней).

2.14. Ребро AD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно грани ABC. Докажите, что при проекции на плоскость BCD ортоцентр треугольника ABC переходит в ортоцентр треугольника BCD.

См. также задачи 1.9, 1.10.

§ 3. Площадь проекции многоугольника

2.15. Площадь многоугольника равна S. Докажите, что площадь его проекции на плоскость Π равна $S\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостью Π и плоскостью многоугольника.

2.16. Вычислите косинус двугранного угла при ребре правильного тетраэдра.

2.17. Двугранный угол при основании правильной n-угольной пирамиды равен α. Найдите двугранный угол между соседними боковыми гранями.

2.18. Двугранные углы при рёбрах основания треугольной пирамиды равны α, β и γ; площади соответствующих боковых граней равны S_a, S_b и S_c. Докажите, что площадь основания равна

$$S_a \cos\alpha + S_b \cos\beta + S_c \cos\gamma.$$

2.19. Докажите, что для любого фиксированного многоугольника M в пространстве можно выбрать вектор $\boldsymbol{v}$ так, что площадь проекции многоугольника M на любую плоскость будет равна длине проекции вектора $\boldsymbol{v}$ на прямую, перпендикулярную этой плоскости.

2.20. Три многоугольника расположены в пространстве так, что их плоскости пересекаются в одной точке. Докажите, что существует плоскость, проекции на которую всех трёх многоугольников равны.

§ 4. Задачи о проекциях

2.21. Проекции пространственной фигуры на две пересекающиеся плоскости являются прямыми линиями. Обязательно ли эта фигура — прямая линия?

2.22. Проекции тела на две плоскости являются кругами. Докажите, что радиусы этих кругов равны.

2.23. Докажите, что площадь проекции куба с ребром 1 на плоскость равна длине его проекции на прямую, перпендикулярную этой плоскости.

2.24. Дан произвольный треугольник ABC. Докажите, что правильный треугольник можно так спроецировать (ортогонально) на некоторую плоскость, что его проекция будет подобна данному треугольнику.

2.25. Проекции двух выпуклых тел на три координатные плоскости совпадают. Обязательно ли эти тела имеют общую точку?

§ 5. Вспомогательные сечения

2.26. Пусть P и Q — середины рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$. Выразите длину отрезка PQ через длины рёбер тетраэдра.

2.27. В пространстве даны две параллельные плоскости и две сферы, причём первая сфера касается первой плоскости в точке A, вторая сфера касается второй плоскости в точке B и сферы касаются друг друга в точке C. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

2.28. Вершины прямоугольника лежат на боковой поверхности конуса. Докажите, что две стороны прямоугольника перпендикулярны оси конуса.

См. также задачи 4.1, 8.1, 8.2.

§ 6. Задачи о сечениях

2.29. Какие правильные многоугольники могут получиться при пересечении куба плоскостью?

2.30. Любое сечение некоторого тела плоскостью, пересекающей это тело более чем в одной точке, является кру́гом. Докажите, что это тело — шар.

2.31. Через вершину A прямого кругового конуса проведено сечение максимальной площади. Его площадь в два раза больше площади сечения, проходящего через ось конуса. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

См. также задачи 6.21, 10.17, 10.20–10.23.

§ 7. Вспомогательные развёртки

2.32. Докажите, что не более одной вершины тетраэдра обладает тем свойством, что сумма любых двух плоских углов при этой вершине больше 180°.

2.33. Докажите, что если в тетраэдре любые два трёхгранных угла равны или симметричны, то все грани этого тетраэдра равны.

2.34. Докажите, что все грани тетраэдра $ABCD$ равны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) суммы плоских углов при каких-либо трёх вершинах тетраэдра равны 180°;

б) суммы плоских углов при каких-либо двух вершинах равны 180°, и, кроме того, равны какие-либо два противоположных ребра;

в) сумма плоских углов при какой-либо вершине равна 180°, и, кроме того, в тетраэдре есть две пары равных противоположных рёбер.

2.35. Докажите, что если сумма плоских углов при вершине пирамиды больше 180°, то каждое её боковое ребро меньше полупериметра основания.

2.36. Пусть S_A, S_B, S_C и S_D — суммы плоских углов тетраэдра $ABCD$ при вершинах A, B, C и D. Докажите, что если $S_A = S_B$ и $S_C = S_D$, то $\triangle ABC = \triangle BAD$ и $\triangle ACD = \triangle BDC$.

2.37. Плоскость пересекает нижнее основание цилиндра по диаметру, а с верхним основанием имеет единственную общую точку. Докажите, что площадь отсечённой части боковой поверхности цилиндра равна площади его осевого сечения.

См. также задачи 10.25, 10.26.

§ 8. Задачи о развёртках

2.38. Даны две концентрические окружности. Вокруг меньшей из них описан многоугольник, целиком находящийся внутри большей окружности. Из общего центра на стороны многоугольника опущены перпендикуляры, которые продолжены до пересечения с большей окружностью; каждая из полученных точек пересечения соединена с концами соответствующей стороны многоугольника. При каком условии построенный таким образом звёздчатый многоугольник будет развёрткой пирамиды?

2.39. Из квадрата со стороной 3 вырежьте одну фигуру, которая представляет собой развёртку полной поверхности куба с ребром 1.

2.40. На бесконечном конусе, угол развёртки которого равен α, взята точка. Из этой точки в обе стороны проводится линия так, что после развёртки она превращается в отрезки прямых. Определите число её самопересечений.

Решения

2.1. Рассмотрим проекцию данного параллелепипеда на плоскость ABC параллельно прямой A_1D (рис. 2.1). Ясно, что на этом рисунке

$$AM : MC_1 = AD : BC_1 = 1 : 2.$$

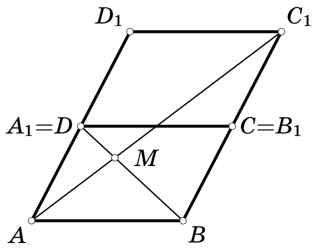


Рис. 2.1

2.2. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции вершин данного правильного треугольника на прямую, перпендикулярную данной плоскости, a — длина его стороны. Тогда длины отрезков A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1 равны $a\sin\gamma$, $a\sin\alpha$ и $a\sin\beta$. Ясно, что один из этих отрезков состоит из двух других.

2.3. Ответ: нет, нельзя. Рассмотрим проекцию на прямую, перпендикулярную основанию. Проекции всех векторов основания нулевые, а проекция суммы векторов боковых рёбер не может быть равна нулю, так как сумма нечётного количества чисел ±1 нечётна.

2.4. Рассмотрим проекцию тетраэдра на плоскость, перпендикулярную прямой, соединяющей середины рёбер AB и CD. Данная плоскость проецируется при этом в прямую $L'N'$, проходящую через точку пересечения диагоналей параллелограмма $A'D'B'C'$. Ясно, что для проекций $B'C' : C'N' = A'D' : D'L'$.

2.5. Пусть K — точка пересечения отрезков BC_1 и B_1C. Тогда плоскости ABC_1 и AB_1C пересекаются по прямой AK, а плоскости A_1B_1C и A_1BC_1 — по прямой A_1K. Рассмотрим проекцию на плоскость ABC параллельно AA_1. Как проекция точки P, так и проекция точки P_1 лежат на прямой AK_1, где

K_1 — проекция точки K. Аналогичные рассуждения показывают, что проекции точек P и P_1 лежат на прямых BL_1 и CM_1, где L_1 — проекция точки пересечения прямых AC_1 и A_1C, M_1 — проекция точки пересечения прямых AB_1 и A_1B. Поэтому проекции точек P и P_1 совпадают, т. е. $PP_1 \parallel AA_1$.

2.6. Пусть A_1 и B_1 — проекции точек A и B на плоскость Π. Прямые AX и BX образуют равные углы с плоскостью тогда и только тогда, когда прямоугольные треугольники AA_1X и BB_1X подобны, т. е. $A_1X : B_1X = AA_1 : BB_1 = \text{const}$. Геометрическим местом точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух данных точек A_1 и B_1 той же плоскости постоянно, является окружность Аполлония или прямая (см. «Задачи по планиметрии», задача 7.14).

2.7. Пусть $d = AB$, где A и B — вершины многогранника. Рассмотрим проекцию многогранника на прямую AB. Предположим, что некоторая точка C проецируется не на отрезок AB, а на его продолжение, например, за точку B, тогда $AC > AB$. Полученное противоречие показывает, что все точки многогранника проецируются в точки отрезка AB. Так как длина проекции отрезка на прямую не превосходит длины самого отрезка, достаточно доказать, что в каждую внутреннюю точку отрезка AB проецируются точки по крайней мере трёх различных рёбер. Проведём через произвольную внутреннюю точку отрезка AB плоскость, перпендикулярную ему. Сечение многогранника этой плоскостью является n-угольником, где $n \geqslant 3$, а значит, плоскость пересекает по крайней мере три различных ребра.

2.8. Достаточно проверить, что точка P удалена от каждой стороны треугольника ABC не более, чем его противоположная вершина. Докажем это утверждение, например, для стороны BC. Для этого рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную прямой BC; точки B и C при этой проекции переходят в одну точку M (рис. 2.2). Пусть $A'Q'$ — проекция соответствующей высоты тетраэдра. Так как $D'P' \leqslant A'Q'$ по условию, то $D'M \leqslant A'M$. Ясно также, что $P'M \leqslant D'M$.

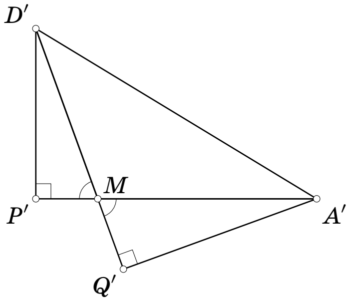


Рис. 2.2

2.9. Случай, когда прямая l параллельна плоскости Π, очевиден, поэтому будем считать, что они не параллельны. Пусть O — точка пересечения прямой l и плоскости Π. Возьмём произвольную точку A прямой l, отличную от точки O, и рассмотрим её проекцию A' на плоскость Π. Прямая AA' перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости Π. В частности, она перпендикулярна прямой l_1.

Предположим сначала, что $l \perp l_1$, т. е. $AO \perp l_1$. Тогда прямая l_1 перпендикулярна плоскости AOA', поэтому $l_1 \perp OA'$, т. е. $l_1 \perp l'$.

Предположим теперь, что $l' \perp l_1$, т. е. $A'O \perp l_1$. Тогда прямая l_1 перпендикулярна плоскости AOA', поэтому $l_1 \perp OA$, т. е. $l_1 \perp l$.

2.10. Прямая AC является проекцией прямой AC_1 на плоскость ABD, поэтому по теореме о трёх перпендикулярах $AC_1 \perp BD$ тогда и только тогда, когда $AC \perp BD$. Аналогично $AC_1 \perp A_1B$ тогда и только тогда, когда $AB_1 \perp A_1B$. В свою очередь, условия $AC \perp BD$ и $AB_1 \perp A_1B$ эквивалентны тому, что $AB = AD$ и $AB = AA_1$.

2.11. Докажем, например, что рёбра AD и BC правильного тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны. Пусть O — проекция вершины D на плоскость ABC. Точка O является центром треугольника ABC, поэтому $AO \perp BC$. Прямая AO является проекцией прямой AD на плоскость ABC, поэтому согласно теореме о трёх перпендикулярах $AD \perp BC$.

2.12. Проекцией вершины S на плоскость основания является центр O правильного многоугольника $A_1 \ldots A_{2n-1}$, а проекцией прямой SA_1 на ту же плоскость является прямая OA_1. Ясно, что $OA_1 \perp A_nA_{n+1}$, поэтому согласно теореме о трёх перпендикулярах $SA_1 \perp A_nA_{n+1}$.

2.13. Пусть AH — высота тетраэдра $ABCD$. По теореме о трёх перпендикулярах $BH \perp CD$ тогда и только тогда, когда $AB \perp CD$. Поэтому если H — точка пересечения высот грани BCD, то $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ и $AD \perp BC$. И наоборот, если $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ и $AD \perp BC$, то H — точка пересечения высот грани BCD.

2.14. Пусть BK и BM — высоты треугольников ABC и DBC соответственно. Так как $BK \perp AC$ и $BK \perp AD$, то прямая BK перпендикулярна плоскости ADC, а значит, $BK \perp DC$. По теореме о трёх перпендикулярах проекция прямой BK на плоскость BDC перпендикулярна прямой DC, т. е. она совпадает с прямой BM. Для высот, опущенных из вершины C, доказательство аналогично.

2.15. Утверждение задачи очевидно для треугольника, одна из сторон которого параллельна линии пересечения плоскости Π с плоскостью многоугольника. В самом деле, длина этой стороны при проекции не изменяется, а длина высоты, опущенной на неё, при проекции умножается на $\cos\varphi$.

Докажем теперь, что любой многоугольник можно разрезать на треугольники указанного вида. Проведём для этого через все вершины многоугольника прямые, параллельные линии пересечения плоскости Π с плоскостью многоугольника. Многоугольник разрежется при этом на треугольники и трапеции. Остаётся разрезать каждую трапецию по любой из её диагоналей.

2.16. Пусть φ — двугранный угол при ребре правильного тетраэдра; O — проекция вершины D правильного тетраэдра $ABCD$ на противоположную грань. Тогда $\cos\varphi = S_{ABO} : S_{ABD} = \dfrac{1}{3}$.

2.17. Пусть S — площадь боковой грани, h — высота пирамиды, a — сторона основания, φ — искомый угол. Площадь проекции каждой из двух соседних боковых граней на биссекторную плоскость двугранного угла между ними равна $S\cos\dfrac{\varphi}{2}$; с другой стороны, эта площадь равна $ah\sin\dfrac{\pi/n}{2}$, поскольку проекция представляет собой треугольник с высотой h, опущенной на сторону длины $a\sin\dfrac{\pi}{n}$. Ясно также, что площадь проекции боковой грани на плоскость, проходящую через её основание перпендикулярно основанию пирамиды, равна $S\sin\alpha$; с другой стороны, она равна $a\dfrac{h}{2}$. Следовательно, $\cos\dfrac{\varphi}{2}=\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{n}$.

2.18. Пусть D' — проекция вершины D пирамиды $ABCD$ на плоскость основания. Тогда

$$S_{ABC}=\pm S_{BCD'}\pm S_{ACD'}\pm S_{ABD'}=S_a\cos\alpha+S_b\cos\beta+S_c\cos\gamma.$$

Площадь треугольника BCD' берётся со знаком минус, если точки D' и A лежат по разные стороны от прямой BC; для площадей треугольников ACD' и ABD' знак выбирается аналогично.

2.19. В качестве вектора $\boldsymbol{v}$ выберем вектор, который перпендикулярен плоскости многоугольника M, причём его длина равна площади многоугольника M. Если вектор $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен плоскости Π, то угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$ равен углу между плоскостью Π и плоскостью многоугольника M. Поэтому согласно задаче 2.15 вектор $\boldsymbol{v}$ обладает требуемым свойством.

2.20. Для каждого многоугольника M_i выберем вектор $\boldsymbol{v}_i$ так, что длина проекции многоугольника M_i на любую плоскость равна проекции вектора $\boldsymbol{v}_i$ на прямую, перпендикулярную этой плоскости (задача 2.19). Отложим векторы $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{v}_3$ от одной точки и через их концы проведём плоскость Π. Проекции векторов $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{v}_3$ на прямую, перпендикулярную плоскости Π, равны, поэтому проекции многоугольников на плоскость Π тоже равны.

Замечание. Вектор $\boldsymbol{v}_i$ определён не однозначно: вместо $\boldsymbol{v}_i$ можно взять $-\boldsymbol{v}_i$. Поэтому всего есть 4 семейства параллельных плоскостей, для которых площади проекций данных многоугольников равны.

2.21. Ответ: не обязательно. Рассмотрим плоскость, перпендикулярную двум данным плоскостям. Любая фигура, расположенная в этой плоскости, будет обладать требуемым свойством, если только её проекции на данные плоскости не ограничены.

2.22. Диаметры указанных кругов равны длине проекции тела на прямую, по которой пересекаются данные плоскости.

2.23. Пусть точки B_1 и D при рассматриваемой проекции переходят во внутренние точки проекции куба (рис. 2.3). Тогда площадь проекции куба равна удвоенной площади проекции треугольника ACD_1, т.е она равна $2S\cos\varphi$, где S — площадь треугольника ACD_1, φ — угол между плоскостью проекции и плоскостью ACD_1. Так как сторона треугольника ACD_1 равна $\sqrt{2}$, то $2S=\sqrt{3}$.

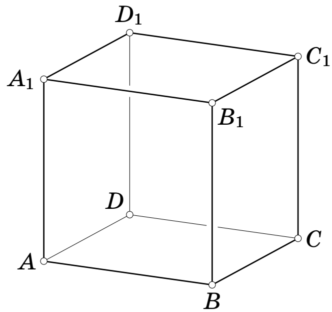


Рис. 2.3

Проекция куба на прямую l, перпендикулярную плоскости проекции, совпадает с проекцией диагонали B_1D на эту прямую. Прямая B_1D перпендикулярна плоскости ACD_1, поэтому угол между прямыми l и B_1D тоже равен φ. Следовательно, длина проекции куба на прямую l равна $B_1D\cos\varphi = \sqrt{3}\cos\varphi$.

2.24. Проведём через вершины A и B прямые, перпендикулярные плоскости ABC, и возьмём на них точки A_1 и B_1. Пусть $AA_1 = x$ и $BB_1 = y$ (если точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны от плоскости ABC, то считаем, что числа x и y имеют разные знаки). Пусть a, b и c — длины сторон данного треугольника. Достаточно проверить, что числа x и y можно подобрать так, чтобы треугольник A_1B_1C был правильным, т.е. выполнялись равенства $x^2 + b^2 = y^2 + a^2$ и $(x-y)^2 + c^2 = y^2 + a^2$. Эти равенства можно переписать в виде $x^2 - y^2 = \lambda$ и $x^2 - 2xy = \mu$, где $\lambda = a^2 - b^2$ и $\mu = a^2 - c^2$. Из второго равенства получаем $2y = x - \dfrac{\mu}{x}$. Подставляя это выражение в первое равенство, приходим к уравнению $3u^2 + (2\mu - 4\lambda)u - \mu^2 = 0$, где $u = x^2$. Дискриминант $D = (2\mu - 4\lambda)^2 + 12\mu^2$ этого квадратного уравнения неотрицателен, поэтому оно имеет корень x_0. Если $x_0 \neq 0$, то можно выбрать y_0 так, что $2y_0 = x_0 - \dfrac{\mu}{x_0}$. Если же $x = 0$ — единственное решение полученного уравнения, то $D = 0$, поэтому $\lambda = \mu = 0$. В таком случае можно положить $y = 0$.

2.25. Ответ: обязательно. Докажем сначала, что если на плоскости проекции двух выпуклых фигур на координатные оси совпадают, то эти фигуры имеют общую точку. Для этого достаточно доказать, что если точки K, L, M и N лежат на сторонах AB, BC, CD и DA прямоугольника $ABCD$, то точка пересечения диагоналей AC и BD принадлежит четырёхугольнику $KLMN$. Диагональ AC не принадлежит треугольникам KBL и NDM, а диагональ BD не принадлежит треугольникам KAN и LCM. Поэтому точка пересечения диагоналей AC и BD не принадлежит ни одному из этих треугольников, а значит, она принадлежит четырёхугольнику $KLMN$.

Опорные плоскости, параллельные координатным плоскостям, для рассматриваемых тел совпадают. Возьмём одну из опорных плоскостей. Точки каждого из рассматриваемых тел, лежащие в этой плоскости, образуют выпуклую фигуру, причём проекции этих фигур на координатные оси совпадают. Поэтому в каждой опорной плоскости есть хотя бы одна общая точка рассматриваемых тел.

2.26. Отрезки PC и PD являются медианами треугольников ABC и ABD, поэтому

$$PC^2 = \frac{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}{4} \quad \text{и} \quad PD^2 = \frac{2AD^2 + 2BD^2 - AB^2}{4}.$$

Отрезок PQ является медианой треугольника PCD, поэтому

$$PQ^2 = \frac{2PC^2 + 2PD^2 - CD^2}{4} = \frac{1}{4}(BC^2 + AC^2 + AD^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2).$$

2.27. В любом случае точки A, B и C лежат в одной плоскости, и поэтому можно рассмотреть сечение плоскостью, содержащей эти точки. Так как плоскость сечения проходит через точку касания сфер (сферы и плоскости), в сечении получаются касающиеся окружности (окружность и прямая). Пусть O_1

и O_2 — центры первой и второй окружностей. Так как $O_1A \parallel O_2B$ и точки O_1, C и O_2 лежат на одной прямой, $\angle AO_1C = \angle BO_2C$. Поэтому $\angle ACO_1 = BCO_2$, т. е. точки A, B и C лежат на одной прямой.

2.28. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, вершины которого лежат на боковой поверхности конуса с вершиной S. Докажем, что $SA + SC = SB + SD$. Рассмотрим плоскость, проведённую через центр O прямоугольника перпендикулярно оси конуса. Она пересекает лучи SA, SC, SB и SD в точках A', C', B' и D' соответственно (для определённости будем считать, что точка C' лежит на отрезке SC). Отрезки SA', SC', SB' и SD' — образующие конуса, отсекаемого от данного конуса плоскостью, перпендикулярной оси, поэтому они равны. В частности, треугольники $SA'C'$ и $SB'D'$ равнобедренные.

Рассмотрим сечение конуса плоскостью SAC. Точка O лежит в этой плоскости (она является серединой отрезка AC). Проведём через точку C прямую, параллельную стороне SA. Обозначим через C'' точку пересечения этой прямой с продолжением основания $A'C'$. Треугольники OCC'' и OAA' равны, так как у них равны стороны OC и OA и прилежащие к ним углы. Треугольник $CC'C''$ подобен треугольнику $SA'C'$, поэтому он тоже равнобедренный. Следовательно, $CC' = CC'' = AA'$, а значит,

$$SA + SC = (SA' - AA') + (SC' + CC') = SA' + SC'.$$

Аналогично $SB + SD = SB' + SD'$. Остаётся заметить, что $SB' + SD' = SA' + SC'$, так как $SA' = SB' = SC' = SD'$.

Согласно задаче 1.28 имеет место равенство $SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$. Из равенств $SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$ и $SA + SC = SB + SD$ следует, что либо $SA = SB$ и $SC = SD$, либо $SA = SD$ и $SC = SB$. В первом случае оси конуса перпендикулярна сторона AB, а во втором — сторона AD.

2.29. Каждая сторона полученного многоугольника принадлежит одной из граней куба, поэтому число его сторон не превосходит 6. Кроме того, стороны, принадлежащие противоположным граням куба, параллельны, так как линии пересечения плоскости с двумя параллельными плоскостями параллельны. Следовательно, сечение куба не может быть правильным пятиугольником, так как у правильного пятиугольника нет параллельных сторон. Легко проверить, что правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник могут быть сечениями куба.

2.30. Рассмотрим некоторый круг, являющийся сечением данного тела, и проведём через его центр прямую l, перпендикулярную его плоскости. Эта прямая пересекает данное тело по некоторому отрезку AB. Все сечения, проходящие через прямую l, являются кругами с диаметром AB.

2.31. Ответ: 150°. Рассмотрим произвольное сечение, проходящее через вершину A. Это сечение является треугольником ABC, причём его стороны AB и AC имеют постоянную длину, поскольку они являются образующими конуса. Поэтому площадь сечения пропорциональна синусу угла BAC. Угол BAC изменяется от 0° до φ, где φ — угол при вершине осевого сечения конуса. Если $\varphi \leqslant 90^\circ$, то наибольшую площадь имеет осевое сечение, а если $\varphi > 90^\circ$, то наибольшую площадь имеет сечение с прямым углом при вершине A. Таким образом, из условия задачи следует, что $\sin\varphi = 0{,}5$ и $\varphi > 90^\circ$, т. е. $\varphi = 150^\circ$.

2.32. Предположим, что вершины A и C обладают указанным свойством. Рассмотрим развёртку на плоскость двух граней, примыкающих к ребру AC. Получаем четырёхугольник $ABCD$, у которого $\angle DAB > 180^\circ$ и $\angle BCD > 180^\circ$, а значит, сумма всех углов этого четырёхугольника больше 360°, что невозможно. Получено противоречие.

2.33. Рассмотрим развёртку данного тетраэдра на плоскость грани ABC. Она представляет собой треугольник ABC, к которому приложены треугольники ABD_C, BCD_A, CAD_B. Из условия следует, что следующие 4 величины равны: суммы троек углов при вершинах A, B и C и сумма углов при вершинах D_A, D_B, D_C. Значит, каждая из этих сумм равна 180°, поскольку сумма всех 12 рассматриваемых углов представляет собой сумму углов четырёх треугольников. В итоге получаем, что развёртка представляет собой треугольник, в котором проведены три средние линии (мы воспользовались здесь тем, что $AD_B = AD_C$, $BD_A = BD_C$, $CD_A = CD_B$). Средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника, поэтому грани тетраэдра равны.

2.34. а) Пусть суммы плоских углов при вершинах A, B и C равны 180°. Тогда развёртка тетраэдра на плоскость ABC представляет собой треугольник, причём точки A, B и C — середины его сторон. Следовательно, все грани тетраэдра равны. Наоборот, если тетраэдр равногранный, то при развёртке любые две его смежные грани образуют параллелограмм. Следовательно, развёртка тетраэдра представляет собой треугольник, т. е. суммы плоских углов при вершинах тетраэдра равны 180°.

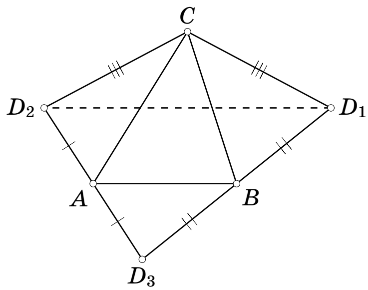


Рис. 2.4

б) Пусть суммы плоских углов при вершинах A и B равны 180°. Рассмотрим развёртку тетраэдра на плоскость грани ABC (рис. 2.4). Возможны два варианта правильного пятиугольника.

1. Равны рёбра AB и CD. Тогда $D_1C + D_2C = 2AB = D_1D_2$, поэтому точка C — середина отрезка D_1D_2.

2. Равны рёбра, отличные от AB и CD. Пусть для определённости $AC = BD$. Тогда точка C лежит как на серединном перпендикуляре к отрезку D_1D_2, так и на окружности радиуса BD с центром A. Одна из точек пересечения этих множеств — середина отрезка D_1D_2, а вторая точка пересечения лежит на прямой, проходящей через D_3 параллельно D_1D_2. Вторая точка в нашем случае не годится.

в) Пусть сумма плоских углов при вершине A равна 180°, $AB = CD$ и $AD = BC$. Рассмотрим развёртку тетраэдра на плоскость ABC и воспользуемся для образов вершины D обозначениями рис. 2.4. Противоположные стороны четырёхугольника $ABCD_2$ равны, поэтому он является параллелограммом. Следовательно, отрезки CB и AD_3 параллельны и равны, а значит, четырёхугольник $ACBD_3$ — параллелограмм. Поэтому развёртка тетраэдра является треугольником, причём A, B и C — середины его сторон.

2.35. Пусть $SA_1 \dots A_n$ — данная пирамида. Разрежем боковую поверхность по ребру SA_1 и развернём на плоскость (рис. 2.5). По условию точка S лежит внутри многоугольника $A_1 \dots A_n A_1'$. Пусть B — точка пересечения продолжения отрезка A_1S за точку S со стороной этого многоугольника. Если a и b — длины ломаных $A_1A_2 \dots B$ и $B \dots A_nA_1'$, то $A_1S + SB < a$ и $A_1'S < SB + b$. Потому $2A_1S < a + b$.

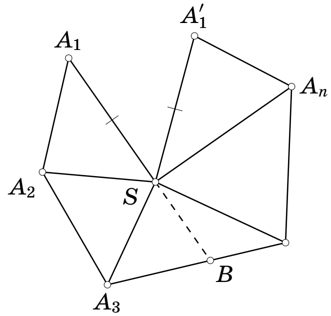


Рис. 2.5

2.36. Так как сумма углов каждой грани тетраэдра равна 180°, $S_A + S_B + S_C + S_D = 4 \cdot 180^\circ$. Пусть для определённости $S_A \leqslant S_C$. Тогда $360^\circ - S_C = S_A \leqslant 180^\circ$. Рассмотрим развёртку данного тетраэдра на плоскость ABC (рис. 2.6). Так как $\angle AD_3C = \angle D_1D_3D_2$ и $AD_3 : D_3C = D_1D_3 : D_3D_2$, то $\Delta ACD_3 \sim \Delta D_1D_2D_3$, причём коэффициент подобия равен отношению боковой стороны к основанию в равнобедренном треугольнике с углом S_A при вершине. Следовательно, $AC = D_1B$. Аналогично $CB = AD_1$. Поэтому $\Delta ABC = \Delta BAD_1 = \Delta BAD$. Аналогично доказывается, что $\Delta ACD = \Delta BDC$.

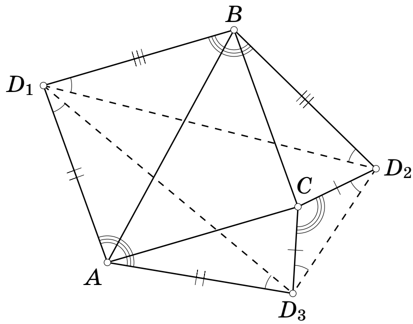


Рис. 2.6

2.37. Пусть O — центр нижнего основания цилиндра; AB — диаметр, по которому плоскость пересекает основание; α — угол между основанием и секущей плоскостью; r — радиус цилиндра. Рассмотрим произвольную образующую XY цилиндра, имеющую общую точку Z с секущей плоскостью (точка X лежит на нижнем основании). Если $\angle AOX = \varphi$, то расстояние от точки X до прямой AB равно $r \sin \varphi$. Поэтому $XZ = r \sin \varphi \operatorname{tg} \alpha$. Ясно также, что $r \operatorname{tg} \alpha = h$, где h — высота цилиндра.

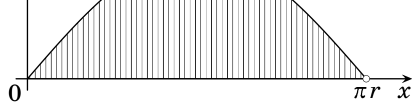


Рис. 2.7

Развернём поверхность цилиндра на плоскость, касающуюся его в точке A. Введём на этой плоскости систему координат, выбрав в качестве начала точку A, а ось Oy направив вверх, параллельно оси цилиндра. Точка X переходит при развёртке в точку $(r\varphi, 0)$, а точка Z — в точку $(r\varphi, h\sin\varphi)$. Таким образом, развёртка поверхности сечения ограничена осью Ox и графиком функции $y = h\sin\frac{x}{r}$ (рис. 2.7). Её площадь равна

$$\int_0^{\pi r} h\sin\frac{x}{r}\,dx = \left(-hr\cos\frac{x}{r}\right)\Big|_0^{\pi r} = 2hr.$$

Остаётся заметить, что площадь осевого сечения цилиндра тоже равна $2hr$.

2.38. Ответ: при условии, что $R > 2r$, где R — радиус большей окружности, r радиус меньшей окружности.

Чтобы получилась развёртка пирамиды, нужно, чтобы выполнялись два условия: 1) длины двух сторон звёздчатого многоугольника, выходящих из одной вершины описанного многоугольника, равны; 2) сумма углов звёздчатого многоугольника при вершинах, лежащих на большей окружности, меньше 360°. Первое условие выполняется всегда. Посмотрим, когда выполняется второе условие. Сравним угол при вершине, лежащей на большей окружности, с углом, под которым видна соответствующая сторона описанного многоугольника из центра окружности. Эти углы равны, если $r = R - r$. Если $r < R - r$, то первый угол меньше второго, а если $r > R - r$, то первый угол больше второго. Остаётся заметить, что сумма углов, под которыми видны стороны описанного многоугольника из центра окружности, равна 360°.

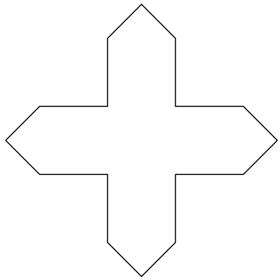


Рис. 2.8

2.39. Если мы возьмём квадрат со стороной 1, приложим к нему 4 квадрата со стороной 1 и к каждой из противоположных сторон этих четырёх квадратов приложим равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 1, то в результате получим фигуру, которая представляет собой требуемую развёртку (рис. 2.8). Эту фигуру можно вырезать из квадрата со стороной $2\sqrt{2} < 3$.

2.40. Ответ: число самопересечений равно n, где n — наибольшее натуральное число, для которого $n\alpha < 180^\circ$.

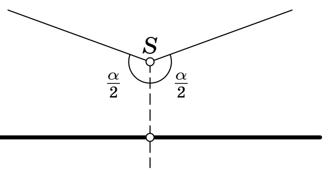


Рис. 2.9

Разрежем конус по образующей, противоположной той, на которой лежит выбранная точка, и развернём его на плоскость. Рассмотрим на плоскости точки S и A, соответствующие вершине конуса и взятой точке при развёртке конуса на эту плоскость. Если $\alpha \geqslant 180^\circ$, то самопересечений нет (рис. 2.9). В дальнейшем будем считать, что $\alpha < 180^\circ$. Восставим из точки A перпендикуляр к прямой SA и возьмём на этом перпендикуляре по одну сторону от прямой SA точки $B_1, \ldots, B_n$ так, что $\angle ASB_k = k\dfrac{\alpha}{2}$ (рис. 2.10). Аналогично по другую сторону от прямой SA возьмём точки $C_1, \ldots, C_n$ так, что $\angle ASC_k = k\dfrac{\alpha}{2}$. На конусе точка B_k совпадает с точкой C_k; других точек самопересечения проведённой линии нет.

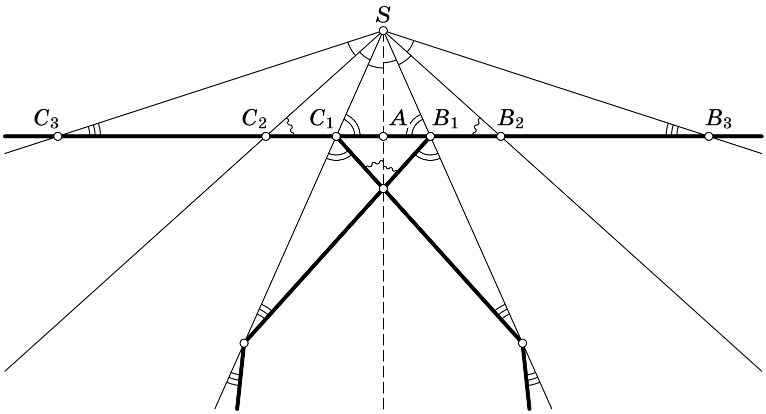


Рис. 2.10

ГЛАВА 3

ОБЪЁМ

Объём тетраэдра $ABCD$ мы будем обозначать V_{ABCD}.

§ 1. Объём тетраэдра и пирамиды

3.1. Три прямые пересекаются в точке A. На каждой из них взято по две точки: B и B', C и C', D и D'. Докажите, что $V_{ABCD} : V_{AB'C'D'} = (AB \cdot AC \cdot AD) : (AB' \cdot AC' \cdot AD')$.

3.2. Докажите, что объём тетраэдра $ABCD$ равен

$$\frac{AB \cdot AC \cdot AD \cdot \sin\beta \sin\gamma \sin\angle D}{6},$$

где β и γ — плоские углы при вершине A, противолежащие рёбрам AB и AC, а $\angle D$ — двугранный угол при ребре AD.

3.3. Площади двух граней тетраэдра равны S_1 и S_2, a — длина их общего ребра, α — двугранный угол между ними. Докажите, что объём тетраэдра равен $\dfrac{2S_1S_2 \sin\alpha}{3a}$.

3.4. Докажите, что объём тетраэдра $ABCD$ равен $\dfrac{d \cdot AB \cdot CD \sin\varphi}{6}$, где d — расстояние между прямыми AB и CD, φ — угол между ними.

3.5. Точка K принадлежит основанию пирамиды с вершиной O. Докажите, что объём пирамиды равен $S \cdot \dfrac{KO}{3}$, где S — площадь проекции основания на плоскость, перпендикулярную KO.

3.6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 равна d. Докажите, что существует треугольник, длины сторон которого равны расстояниям от вершин A_1, B и D до этой диагонали, причём объём параллелепипеда равен $2dS$, где S — площадь этого треугольника.

См. также задачи 5.9 (а), 15.34, 15.35.

§ 2. Объём многогранников

3.7. Докажите, что объём многогранника, описанного около сферы радиуса R, равен $\frac{SR}{3}$, где S — площадь поверхности многогранника.

3.8. Все вершины выпуклого многогранника расположены в двух параллельных плоскостях. Докажите, что его объём равен $\frac{h(S_1+S_2+4S)}{6}$, где S_1 и S_2 — площади граней, лежащих в данных плоскостях, S — площадь сечения многогранника плоскостью, равноудалённой от данных, h — расстояние между данными плоскостями.

3.9. Внутри выпуклого многогранника объёмом V дано $3(2^n-1)$ точек. Докажите, что в нём содержится многогранник объёмом $\frac{V}{2^n}$, во внутренней части которого нет ни одной из данных точек.

См. также задачи 13.9, 15.36, 15.37.

§ 3. Объём круглых тел

3.10. Докажите, что отношение объёмов сферы и описанного около неё усечённого конуса равно отношению площадей их полных поверхностей.

3.11. а) Радиус прямого кругового цилиндра и его высота равны R. Рассмотрим шар радиуса R с центром в центре O нижнего основания цилиндра и конус с вершиной O, основанием которого служит верхнее основание цилиндра. Докажите, что объём конуса равен объёму части цилиндра, лежащей вне шара. Для доказательства воспользуйтесь равенством площадей сечений, параллельных основаниям (Архимед).

б) Считая известными формулы для объёма цилиндра и конуса, получите формулу для объёма шара.

3.12. Найдите объём V усечённого конуса с высотой h и радиусами оснований R и r.

3.13. Дана плоская выпуклая фигура периметра $2p$ и площади S. Рассмотрим тело, состоящее из точек, удалённых от этой фигуры на расстояние не больше d. Найдите объём этого тела.

3.14. Объём выпуклого многогранника равен V, площадь поверхности — S; длина i-го ребра равна l_i, двугранный угол при этом ребре равен φ_i. Рассмотрим тело, состоящее из точек, удалённых от многогранника на расстояние не больше d. Найдите объём и площадь поверхности этого тела.

См. также задачи 4.24, 4.25, 4.26.

§ 4. Свойства объёма

3.15. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Противоположные рёбра тетраэдра перемещаются по этим прямым, причём их длины остаются постоянными. Докажите, что объём тетраэдра при этом не изменяется.

3.16. В пространстве даны три параллельные прямые a, b и c. Ребро тетраэдра перемещается по прямой a, причём длина его остаётся постоянной, а две оставшиеся вершины перемещаются по прямым b и c. Докажите, что объём тетраэдра при этом не изменяется.

3.17. Докажите, что плоскость, пересекающая лишь боковую поверхность цилиндра, делит его объём в таком же отношении, в каком она делит ось цилиндра.

3.18. Докажите, что плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся рёбер тетраэдра, делит его на две части равного объёма.

3.19. Параллельные прямые a, b, c и d пересекают одну плоскость в точках A, B, C и D, а другую плоскость — в точках A', B', C' и D'. Докажите, что объёмы тетраэдров $A'BCD$ и $AB'C'D'$ равны.

3.20. В плоскостях граней тетраэдра $ABCD$ взяты точки A_1, B_1, C_1 и D_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны. Найдите отношение объёмов тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

См. также задачу 15.38.

§ 5. Вычисление объёма

3.21. На трёх параллельных прямых взяты сонаправленные векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. Докажите, что объём выпуклого многогранника $ABCA_1B_1C_1$ равен $\dfrac{S(AA_1+BB_1+CC_1)}{3}$, где S — площадь треугольника, получающегося при пересечении этих прямых плоскостью, им перпендикулярной.

3.22. Пусть M — точка пересечения медиан тетраэдра. Докажите, что существует четырёхугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам, соединяющим M с вершинами тетраэдра. Вычислите объём тетраэдра, задаваемого этим пространственным четырёхугольником, если объём тетраэдра $ABCD$ равен V.

3.23. Через высоту правильного треугольника со стороной a проведена плоскость, перпендикулярная плоскости треугольника, и в этой плоскости взята прямая l, параллельная высоте треугольника. Найдите объём тела, полученного при вращении треугольника вокруг прямой l.

См. также задачи 5.10, 18.11.

§ 6. Вспомогательный объём

3.24. Из точки X, лежащей внутри правильного тетраэдра $ABCD$, опущены перпендикуляры XA_1, XB_1, XC_1 и XD_1 на его грани. Докажите, что сумма $XA_1+XB_1+XC_1+XD_1$ не зависит от выбора точки X.

3.25. Докажите, что биссекторная плоскость двугранного угла при ребре тетраэдра делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям граней, заключающих этот угол.

3.26. В тетраэдре $ABCD$ грани ABC и ABD имеют площади p и q и образуют между собой угол α. Найдите площадь сечения, проходящего через ребро AB и центр вписанного в тетраэдр шара.

3.27. Докажите, что если x_1, x_2, x_3, x_4 — расстояния от произвольной точки внутри тетраэдра до его граней, а h_1, h_2, h_3, h_4 — соответствующие высоты тетраэдра, то

$$\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}+\frac{x_3}{h_3}+\frac{x_4}{h_4}=1.$$

3.28. На грани ABC тетраэдра $ABCD$ взята точка O, и через неё проведены отрезки OA_1, OB_1 и OC_1, параллельные рёбрам DA, DB и DC, до пересечения с гранями тетраэдра. Докажите, что

$$\frac{OA_1}{DA}+\frac{OB_1}{DB}+\frac{OC_1}{DC}=1.$$

3.29. Пусть r — радиус вписанной сферы тетраэдра; r_a, r_b, r_c и r_d — радиусы вневписанных сфер, каждая из которых касается одной грани и продолжений трёх других. Докажите, что

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_d}=\frac{2}{r}.$$

3.30. Дана выпуклая четырёхугольная пирамида $MABCD$ с вершиной M. Плоскость пересекает рёбра MA, MB, MC и MD в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Докажите, что

$$S_{BCD}\frac{MA}{MA_1}+S_{ABD}\frac{MC}{MC_1}=S_{ABC}\frac{MD}{MD_1}+S_{ACD}\frac{MB}{MB_1}.$$

3.31. Боковые грани треугольной пирамиды равновелики и образуют с основанием углы α, β и γ. Найдите отношение радиуса вписанной сферы к радиусу вневписанной сферы, касающейся основания пирамиды и продолжений боковых сторон.

См. также задачи 13.7, 15.1, 18.29.

§ 7. Площадь поверхности. Теоремы Гюльдена

3.32. Докажите, что площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению длины образующей на длину окружности среднего сечения.

3.33. Прямая l и кривая C (не обязательно замкнутая) лежат в одной плоскости и не пересекаются. Докажите, что площадь поверхности фигуры, образованной при вращении кривой C вокруг оси l, равна $2\pi RP$, где R — расстояние от центра масс кривой C до оси l, а P — периметр (длина) кривой C (*первая теорема Гюльдена*).

3.34. Прямая l и фигура F лежат в одной плоскости и не пересекаются. Докажите, что объём тела, образованного при вращении фигуры F вокруг оси l, равна $2\pi RS$, где R — расстояние от центра масс фигуры F до оси l, а S — площадь фигуры F (*вторая теорема Гюльдена*).

Решения

3.1. Пусть h и h' — длины перпендикуляров, опущенных из точек D и D' на плоскость ABC; S и S' — площади треугольников ABC и $AB'C'$. Ясно, что $h : h' = AD : AD'$ и $S : S' = (AB \cdot AC) : (AB' \cdot AC)$. Остаётся заметить, что $V_{ABCD} : V_{AB'C'D'} = hS : (h'S')$.

3.2. Высота треугольника ABD, проведённая из вершины B, равна $AB \sin\gamma$, поэтому высота тетраэдра, опущенная на плоскость ACD, равна $AB \sin\gamma \sin\angle D$. Ясно также, что площадь треугольника ACD равна $AC \cdot AD \dfrac{\sin\beta}{2}$.

3.3. Пусть h_1 и h_2 — высоты данных граней, опущенные на их общую сторону. Тогда $V = (h_1 \sin\alpha) \dfrac{S_2}{3} = ah_1h_2 \dfrac{\sin\alpha}{6}$. Остаётся заметить, что $h_1 = \dfrac{2S_1}{a}$, $h_2 = \dfrac{2S_2}{a}$.

3.4. Рассмотрим параллелепипед, образованный плоскостями, проходящими через рёбра тетраэдра параллельно противоположным рёбрам. Плоскости граней исходного тетраэдра отсекают от параллелепипеда четыре тетраэдра, объём каждого из которых составляет $\dfrac{1}{6}$ объёма параллелепипеда. Поэтому объём тетраэдра составляет $\dfrac{1}{3}$ объёма параллелепипеда. А объём параллелепипеда легко выражается через данные в условии величины: его грань является параллелограммом с диагоналями длиной AB и CD и углом φ между ними, а высота, опущенная на эту грань, равна d.

3.5. Угол α между прямой KO и высотой h пирамиды равен углу между плоскостью основания и плоскостью, перпендикулярной KO. Поэтому $h = KO \cos\alpha$ и $S = S' \cos\alpha$, где S' — площадь основания (см. задачу 2.15). Следовательно, $S \cdot KO = S'h$.

3.6. Рассмотрим проекцию данного параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную прямой AC_1 (рис. 3.1). В дальнейшем ходе решения используются обозначения рис. 3.1.

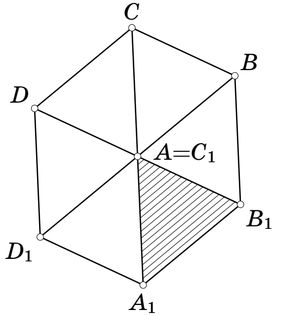


Рис. 3.1

На этом рисунке длины отрезков AA_1, AB и AD равны расстояниям от вершин A_1, B и D параллелепипеда до диагонали AC_1, а стороны треугольника AA_1B_1 равны этим отрезкам. Так как площадь этого треугольника равна S, то площадь треугольника A_1DB равна $3S$. Если M — точка пересечения плоскости A_1DB с диагональю AC_1, то $AM = \frac{d}{3}$ (задача 2.1), а значит, согласно задаче 3.5 объём тетраэдра AA_1DB равен $\frac{dS}{3}$. Ясно также, что объём этого тетраэдра составляет $\frac{1}{6}$ часть объёма параллелепипеда.

3.7. Соединим центр сферы с вершинами многогранника и разобьём его тем самым на пирамиды. Высоты этих пирамид равны радиусу сферы, а их основания — грани многогранника. Поэтому сумма объёмов этих пирамид равна $S\frac{R}{3}$, где S — сумма площадей их оснований, т. е. площадь поверхности многогранника.

3.8. Первое решение. Пусть O — внутренняя точка многогранника, равноудалённая от данных плоскостей. Поверхность многогранника, заключённую между данными плоскостями, можно разбить на треугольники с вершинами в вершинах многогранника. Следовательно, многогранник разбивается на две пирамиды с вершиной O, основаниями которых служат грани с площадями S_1 и S_2, и несколько треугольных пирамид с вершиной O, основаниями которых служат указанные треугольники. Объёмы первых двух пирамид равны $\frac{hS_1}{6}$ и $\frac{hS_2}{6}$. Объём i-й треугольной пирамиды равен $\frac{2hs_i}{3}$, где s_i — площадь сечения этой пирамиды плоскостью, равноудалённой от данных; в самом деле, объём пирамиды в 4 раза больше объёма тетраэдра, который отсекает от неё указанная плоскость, а объём тетраэдра равен $\frac{hs_i}{6}$. Ясно также, что $s_1 + \ldots + s_n = S$.

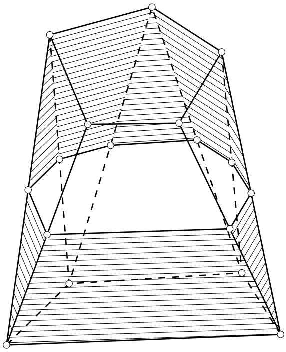


Рис. 3.2

Второе решение. Пусть $S(t)$ — площадь сечения многогранника плоскостью, удалённой на расстояние t от первой плоскости. Докажем, что $S(t)$ — квадратичная функция (при $0 \leqslant t \leqslant h$), т. е. $S(t) = at^2 + bt + c$. Рассмотрим для этого такую проекцию многогранника вдоль некоторой прямой на первую плоскость, что проекции верхней и нижней граней не пересекаются (рис. 3.2). Площади обеих заштрихованных частей являются квадратичными функциями переменной t, поэтому $S(t)$ — площадь незаштрихованной части — тоже квадратичная функция.

Для любой квадратичной функции $S(t)$, где t изменяется от 0 до h, можно подобрать достаточно простой многогранник с точно такой же функцией $S(t)$: если $a>0$, то можно взять усечённую пирамиду, а если $a<0$, то можно взять часть тетраэдра, заключённую между двумя плоскостями, параллельными двум его скрещивающимся рёбрам. Объёмы многогранников с равными функциями $S(t)$ равны (принцип Кавальери). Легко проверить, что любой из новых простых многогранников можно разбить на тетраэдры, вершины которых лежат в данных плоскостях. Для них требуемая формула легко проверяется (в случае, когда две вершины тетраэдра лежат в одной плоскости и две в другой, следует воспользоваться формулой из задачи 3.4).

3.9. Докажем сначала, что через любые две точки, лежащие внутри некоторого многогранника, можно провести плоскость, разбивающую его на две части с равными объёмами. В самом деле, если некоторая плоскость разбивает его на части, отношение объёмов которых равно x, то при поворачивании этой плоскости на 180° вокруг данной прямой отношение объёмов непрерывно изменяется от x до $\dfrac{1}{x}$. Поэтому в некоторый момент оно равно 1.

Докажем требуемое утверждение индукцией по n. При $n=1$ проведём через две из трёх данных точек плоскость, разбивающую многогранник на части с равными объёмами. Та часть, внутренности которой не принадлежит третья из данных точек, является искомым многогранником. Шаг индукции доказывается таким же способом. Через две из $2(2^n-1)$ данных точек проводим плоскость, разбивающую многогранник на части с равными объёмами. Внутри одной из этих частей лежит не более $\dfrac{3(2^n-1)-2}{2}=3\cdot 2^{n-1}-2{,}5$ точек. Так как число точек целое, оно не превосходит $3(2^{n-1}-1)$. Остаётся применить к полученному многограннику предположение индукции.

3.10. И конус, и саму сферу можно рассматривать как некоторый предел многогранников, описанных около данной сферы. Для каждого из этих многогранников справедлива формула $V=S\dfrac{R}{3}$ где V — объём, S — площадь поверхности многогранника, R — радиус данной сферы (задача 3.7). Поэтому отношение объёмов многогранников равно отношению их площадей поверхностей.

3.11. а) Рассмотрим произвольное сечение, параллельное основаниям. Пусть MP — радиус сечения конуса, MC — радиус сечения шара, MB — радиус сечения цилиндра. Требуется проверить, что $\pi MP^2=\pi MB^2-\pi MC^2$, т.е. $MB^2=MP^2+MC^2$. Для доказательства этого равенства достаточно заметить, что $MB=OC$, $MP=MO$, а треугольник COM прямоугольный.

б) Объёмы рассматриваемых в задаче (а) цилиндра и конуса равны πR^3 и $\dfrac{\pi R^3}{3}$ соответственно. Объём шара радиуса R в два раза больше разности объёмов цилиндра и конуса, поэтому он равен $\dfrac{4\pi R^3}{3}$.

3.12. Данный конус получается отсечением конуса с высотой x и основанием радиуса r от конуса с высотой $x+h$ и основанием радиуса R. Поэтому $V=\dfrac{\pi(R^2(x+h)-r^2x)}{3}$. Так как $x:r=(x+h):R$, то $x=\dfrac{rh}{R-r}$ и $x+h=\dfrac{Rh}{R-r}$. Следовательно, $V=\dfrac{\pi(r^2+rR+R^2)h}{3}$.

3.13. Предположим сначала, что данная плоская фигура является выпуклым n-угольником. Тогда рассматриваемое тело состоит из призмы объёмом $2dS$, n полуцилиндров с суммарным объёмом πpd^2 и n тел, из которых можно составить шар объёмом $\dfrac{4\pi d^3}{3}$. Опишем подробнее последние n тел. Возьмём шар радиуса d и разрежем его полукругами (с центрами в центре шара), получающимися параллельными переносами оснований полуцилиндров. Это и есть разбиение шара на n тел.

Итак, если фигура является выпуклым многоугольником, то объём тела равен $2dS+\pi pd^2+\dfrac{4\pi d^3}{3}$. Эта формула справедлива не только для выпуклого многоугольника, но и для произвольной выпуклой фигуры.

3.14. Как и в предыдущей задаче, разобьём полученное тело на исходный многогранник, призмы, соответствующие граням, части цилиндров, соответствующие рёбрам, и части шара радиуса d, соответствующие вершинам. Теперь легко проверить, что объём полученного тела равен $V+Sd+$ $+\dfrac{1}{2}d^2\sum\limits_i(\pi-\varphi_i)l_i+\dfrac{4}{3}\pi d^3$, а площадь его поверхности равна $S+d\sum\limits_i(\pi-\varphi_i)l_i+$ $+4\pi d^2$.

3.15. Объём такого тетраэдра равен $abd\sin\dfrac{\varphi}{6}$, где a и b — длины рёбер, d — расстояние между скрещивающимися прямыми, φ — угол между ними (задача 3.4).

3.16. При проекции на плоскость, перпендикулярную данным прямым, прямые a, b и c переходят в точки A, B и C. Пусть s — площадь треугольника ABC; KS — ребро тетраэдра, перемещающееся по прямой a. Согласно задаче 3.5 объём рассматриваемого тетраэдра равен $sKS/3$.

3.17. Пусть плоскость Π пересекает ось цилиндра в точке O. Проведём через точку O плоскость Π', параллельную основаниям цилиндра. Эти две плоскости делят цилиндр на четыре части, причём две части, заключённые между плоскостями, имеют равный объём. Следовательно, объёмы тех частей, на которые цилиндр делится плоскостью Π, равны объёмам тех частей, на которые он делится плоскостью Π'. Ясно также, что отношение объёмов цилиндров с равными основаниями равно отношению их высот.

3.18. Пусть M и K — середины рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$. Пусть для определённости плоскость, проходящая через M и K, пересекает рёбра AD и BC в точках L и N (рис. 3.3). Плоскость DMC делит тетраэдр на две части равного объёма, поэтому достаточно проверить, что равны объёмы тетраэдров $DKLM$ и $CKNM$. Объём тетраэдра $CKBM$ равен $\dfrac{1}{4}$ объёма тетраэдра $ABCD$, а отношение объёмов тетраэдров $CKBM$ и $CKNM$ равно $BC : CN$. Аналогично отношение $\frac{1}{4}$ объёма тетраэдра $ABCD$ к объёму тетраэдра $DKLM$ равно $AD : DL$. Остаётся заметить, что $BC : CN = AD : DL$ (задача 2.4).

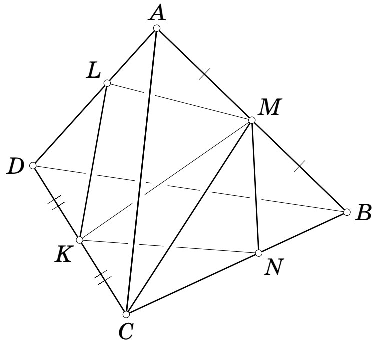


Рис. 3.3

3.19. Согласно задаче 3.16 имеем $V_{A'ABC} = V_{AA'B'C'}$. Запишем аналогичные равенства для объёмов тетраэдров $A'ADC$ и $A'ABD$. Ясно, что $V_{A'BCD} = \pm V_{A'ABC} \pm V_{A'ADC} \pm V_{A'ABD}$, где знаки выбираются точно так же, как в выражении $S_{BCD} = \pm S_{ABC} \pm S_{ADC} \pm S_{ABD}$. Для $V_{AB'C'D'}$ мы получаем аналогичное выражение.

3.20. Пусть A_2 — точка пересечения прямой AA_1 и плоскости $B_1C_1D_1$. Докажем, что $A_1A_2 = 3A_1A$. Тогда $V_{ABCD} : V_{A_2BCD} = 1 : 3$; воспользовавшись результатом задачи 3.19, получим $V_{ABCD} : V_{A_1B_1C_1D_1} = V_{ABCD} : V_{A_2BCD} = 1 : 3$.

Среди коллинеарных векторов $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ найдутся два сонаправленных; предположим для определённости, что векторы $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ сонаправлены. Пусть M — точка пересечения прямых BC_1 и CB_1. Прямые BC_1 и CB_1 принадлежат плоскостям ADB и ADC соответственно, поэтому точка M принадлежит прямой AD. Проведём через параллельные прямые AA_1 и DD_1 плоскость; она проходит через точку M и пересекает отрезки BC и B_1C_1 в некоторых точках L и K (рис. 3.4). Легко проверить, что M — середина отрезка KL, точка A принадлежит прямым DM и D_1L, точка A_1 — прямой DL, точка A_2 — прямой D_1K. Поэтому $\overrightarrow{A_1A} : \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{LM} : \overrightarrow{LK} = 1 : 2$, а значит, $A_1A_2 = 3AA_1$.

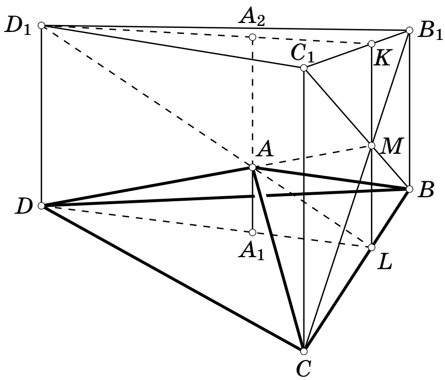


Рис. 3.4

3.21. Отложим на продолжении ребра BB_1 за точку B_1 отрезок B_1B_2, равный ребру AA_1. Пусть K — середина отрезка A_1B_1, т. е. точка пересечения отрезков A_1B_1 и AB_2. Так как объёмы тетраэдров A_1KC_1A и $B_1KC_1B_2$ равны, то равны объёмы многогранников $ABCA_1B_1C_1$ и $ABCB_2C_1$. Аналогичные рассуждения показывают, что объём многогранника $ABCB_2C_1$ равен объёму пирамиды $ABCC_3$, где $CC_3 = AA_1 + BB_1 + CC_1$. Остаётся воспользоваться формулой из задачи 3.5.

3.22. Достроим пирамиду $MABC$ до параллелепипеда (рис. 3.5). Пусть MK — его диагональ. Так как $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ (см. задачу 18.3), то $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MD}$. Поэтому четырёхугольник $MCLK$ искомый. Объёмы тетраэдров $MCKL$ и $MABC$ равны, так как каждый из них составляет $\dfrac{1}{6}$ объёма рассматриваемого параллелепипеда. Ясно также, что объём тетраэдра $MABC$ равен $\dfrac{V}{4}$.

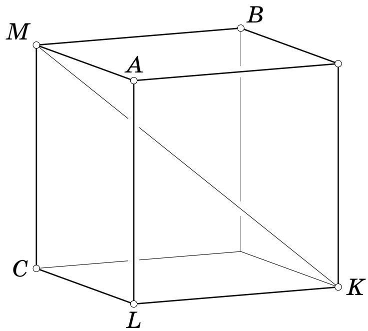


Рис. 3.5

З а м е ч а н и е. Из решения задачи 11.25 следует, что набор векторов сторон требуемого пространственного четырёхугольника определён однозначно. Поэтому существует шесть различных таких четырёхугольников, причём объёмы всех задаваемых ими тетраэдров равны (см. задачу 5.9).

3.23. Заметим сначала, что при вращении (в плоскости) отрезка длиной $2d$ относительно точки, лежащей на серединном перпендикуляре к этому отрезку и удалённой от отрезка на расстояние x, получается кольцо с внутренним радиусом x и внешним радиусом $\sqrt{x^2 + d^2}$; площадь этого кольца равна πd^2, поэтому она не зависит от x. Следовательно, сечение данного тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения, представляет собой кольцо, площадь которого не зависит от положения прямой l. А значит, достаточно рассмотреть случай, когда осью вращения является высота треугольника. В этом случае объём тела вращения — конуса — равен $\pi a^3 \dfrac{\sqrt{3}}{24}$.

3.24. Пусть a — длина ребра данного тетраэдра, V — его объём. Тогда

$$a(XA_1 + XB_1 + XC_1 + XD_1) = 3V.$$

Поэтому сумма $XA_1 + XB_1 + XC_1 + XD_1$ одна и та же для всех точек X внутри тетраэдра $ABCD$.

3.25. Отношение отрезков ребра равно отношению высот, опущенных из его концов на биссекторную плоскость, а последнее отношение равно отношению объёмов тетраэдров, на которые плоскость разделила данный тетраэдр. А так как высоты, опущенные из любой точки биссекторной плоскости на грани двугранного угла, равны, то отношение объёмов этих тетраэдров равно отношению площадей граней, заключающих данный двугранный угол.

3.26. Пусть $a = AB$, x — площадь искомого сечения. Вычислим объём тетраэдра $ABCD$ и его частей по формуле из задачи 3.3 и приравняем полученные выражения:

$$\frac{2}{3}\frac{pq\sin\alpha}{a} = \frac{2}{3}\frac{px\sin(\alpha/2)}{a} + \frac{2}{3}\frac{qx\sin(\alpha/2)}{a}.$$

Следовательно, $x = \dfrac{2pq\cos(\alpha/2)}{p+q}$.

3.27. Разрежем тетраэдр на четыре треугольные пирамиды, основаниями которых служат грани тетраэдра, а вершиной служит данная точка. Указанная сумма отношений является суммой отношений объёмов этих пирамид к объёму тетраэдра. Эта сумма равна 1, так как сумма объёмов пирамид равна объёму тетраэдра.

3.28. Параллельные отрезки AD и OA_1 образуют с плоскостью BCD равные углы, поэтому отношение длин высот, опущенных на эту плоскость из точек O и A, равно отношению длин этих отрезков. Следовательно, $\dfrac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{OA_1}{DA}$. Записав такие же равенства для отрезков OB_1 и OC_1 и сложив их, получим

$$\frac{OA_1}{DA} + \frac{OB_1}{DB} + \frac{OC_1}{DC} = \frac{V_{OBCD} + V_{OACD} + V_{OABD}}{V_{ABCD}} = 1.$$

3.29. Пусть S_a, S_b, S_c и S_d — площади граней BCD, ACD, ABD и ABC; V — объём тетраэдра; O — центр сферы, касающейся грани BCD и продолжений трёх других граней. Тогда $V = -V_{OBCD} + V_{OACD} + V_{OABD} + V_{OABC}$, причём у всех четырёх тетраэдров высоты, опущенные из точки O, равны r_a. Поэтому $3V = r_a(-S_a + S_b + S_c + S_d)$, а значит, $\dfrac{1}{r_a} = \dfrac{-S_a + S_b + S_c + S_d}{3V}$. Записав аналогичные равенства для остальных радиусов вневписанных сфер и сложив их, получим

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_d} = \frac{2(S_a + S_b + S_c + S_d)}{3V} = \frac{2}{r}.$$

3.30. Пирамиду $MA_1B_1C_1D_1$ можно разрезать на два тетраэдра как плоскостью MA_1C_1, так и плоскостью MB_1D_1, поэтому

$$V_{MB_1C_1D_1} + V_{MA_1B_1D_1} = V_{MA_1B_1C_1} + V_{MA_1C_1D_1}. \tag{1}$$

Воспользовавшись формулой из задачи 3.1, получим

$$V_{MB_1C_1D_1} = \frac{MB_1}{MB}\cdot\frac{MC_1}{CM}\cdot\frac{MD_1}{MD}V_{MBCD} = \frac{1}{3}h\left(\frac{MA_1}{MA}\cdot\frac{MB_1}{MB}\cdot\frac{MC_1}{MC}\cdot\frac{MD_1}{MD}\right)\frac{MA}{MA_1}S_{BCD},$$

где h — высота пирамиды $MABCD$. Подставляя в равенство (1) аналогичные выражения для объёмов всех тетраэдров, после сокращения получаем требуемое.

3.31. Пусть r и r' — радиусы вписанной и вневписанной сфер, S — площадь боковой грани, s — площадь основания, V — объём пирамиды. Разбивая данную пирамиду на пирамиды с вершиной в центре вписанной сферы, получаем $V = (3S + s)\dfrac{r}{3}$. Аналогично, рассматривая пирамиды с вершинами в центре вневписанной сферы, получаем, что $V = (3S - s)\dfrac{r'}{3}$. Кроме того, $s = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)S$ (см. задачу 2.15). Следовательно,

$$\frac{r}{r'} = \frac{3S - s}{3S + s} = \frac{3 - \cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma}{3 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}.$$

3.32. Первое решение. Разрежем боковую поверхность конуса на малые «трапеции» образующими конуса. Если такую криволинейную «трапецию» заменить на близкую ей настоящую трапецию, то площадь изменяется сколь угодно мало (если трапеции достаточно мелкие), а сумма площадей настоящих трапеций равна произведению длины образующей на сумму длин их средних линий. Ясно также, что сумма длин средних линий сколь угодно близка к длине окружности среднего сечения.

Второе решение. Пусть длина образующей усечённого конуса равна l, а длины окружностей оснований равны a и b, причём $a<b$. Этот конус получается при отрезании конуса с образующей $\frac{la}{b-a}$ и длиной окружности основания a от конуса с образующей $\frac{lb}{b-a}$ и длиной окружности основания b. Площадь его боковой поверхности равна разности площадей боковых поверхностей этих конусов:

$$\frac{b}{2}\cdot\frac{lb}{b-a}-\frac{a}{2}\cdot\frac{la}{b-a}=l\cdot\frac{a+b}{2}.$$

Остаётся заметить, что $\frac{a+b}{2}$ — это длина окружности среднего сечения.

3.33. Мы ограничимся случаем, когда кривая является n-звенной ломаной, все звенья которой имеют одну и ту же длину $\frac{P}{n}$, где P — периметр ломаной; общий случай получается из этого частного случая предельным переходом. При вращении отдельного звена получается боковая поверхность усечённого конуса, площадь которой согласно задаче 3.32 равна произведению длины образующей $\frac{P}{n}$ на длину окружности среднего сечения $2\pi R_i$, где R_i — расстояние от центра масс звена до оси. Таким образом, площадь поверхности фигуры, полученной при вращении, равна $2\pi RP$, где $R=\frac{R_1+\ldots+R_n}{n}$ — расстояние от центра масс ломаной до оси.

3.34. Рассмотрим сначала случай, когда данная фигура представляет собой прямоугольник, стороны которого параллельны оси. Пусть стороны прямоугольника, параллельные оси, имеют длину a и удалены от оси на расстояния r_1 и r_2, где $r_1>r_2$. Для такой фигуры получаем

$$V=\pi r_1^2a-\pi r_2^2a=2\pi a(r_1-r_2)\frac{r_1+r_2}{2}=2\pi SR.$$

Общий случай получается из рассмотренного нами случая предельным переходом. Действительно, разрежем данную фигуру F на n частей равной площади прямыми, перпендикулярными оси. Затем заменим каждую из полученных фигур площади S/n прямоугольником той же площади и с тем же центром масс. Для новой фигуры мы получаем $V=2\pi S\frac{R_1+\ldots+R_n}{n}$, где $R_1, \ldots, R_n$ — расстояния от центров масс полученных прямоугольников до оси. Ясно, что $\frac{R_1+\ldots+R_n}{n}=R$ — расстояние от центра масс фигуры до оси.

ГЛАВА 4

СФЕРЫ

§ 1. Длина общей касательной

4.1. Плоскость касается двух касающихся шаров радиуса R и r в точках A и B. Докажите, что

$$AB = 2\sqrt{Rr}.$$

4.2. Три шара попарно касаются; плоскость касается этих шаров в точках A, B и C. Найдите радиусы шаров, если стороны треугольника ABC равны a, b и c.

4.3. Радиусы двух непересекающихся шаров равны R и r; расстояние между их центрами равно a. В каких пределах может изменяться длина общей касательной к этим шарам?

§ 2. Касательные к сферам

4.4. Из произвольной точки пространства опущены перпендикуляры на плоскости граней данного куба. Полученные шесть отрезков являются диагоналями других кубов. Рассмотрим шесть сфер, каждая из которых касается всех рёбер соответствующего куба. Докажите, что все эти сферы имеют общую касательную прямую.

4.5. Плоскость Π касается сферы с диаметром AB в точке A. Из точки C этой плоскости проведена касательная CD к сфере. Прямая BD пересекает плоскость Π в точке F. Докажите, что $CA = CF$.

4.6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость, проходящая через вершину A и касающаяся вписанной в куб сферы, пересекает рёбра A_1B_1 и A_1D_1 в точках K и N. Найдите величину угла между плоскостями AC_1K и AC_1N.

4.7. Из точек A и B проведены всевозможные касательные к данной сфере. Докажите, что все точки их пересечения, отличные от A и B, лежат в двух плоскостях.

§ 3. Две пересекающиеся окружности лежат на одной сфере

Две окружности, расположенные в пространстве, называют *касающимися*, если они касаются одной и той же прямой в одной и той же точке; эту точку называют *точкой касания* этих окружностей.

4.8. а) Две окружности, не лежащие в одной плоскости, пересекаются в двух различных точках A и B. Докажите, что существует единственная сфера, содержащая эти окружности.

б) Две касающиеся окружности не лежат в одной плоскости. Докажите, что существует единственная сфера, содержащая эти окружности.

4.9. Дана усечённая треугольная пирамида. Докажите, что если две её боковые грани — вписанные четырёхугольники, то третья боковая грань — тоже вписанный четырёхугольник.

4.10. Все грани выпуклого многогранника являются вписанными многоугольниками, а все углы трёхгранные. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу.

4.11. Три сферы имеют общую хорду. Через точку этой хорды проведены три хорды, принадлежащие различным сферам. Докажите, что концы этих трёх хорд лежат на одной сфере или в одной плоскости.

4.12. В пространстве расположено несколько окружностей, причём любые две из них имеют пару общих точек. Докажите, что либо все эти окружности имеют две общие точки, либо все они принадлежат одной сфере (или одной плоскости).

4.13. Три окружности в пространстве попарно касаются друг друга, причём все три точки касания различны. Докажите, что эти окружности принадлежат либо одной сфере, либо одной плоскости

§ 4. Касающиеся сферы

Если две сферы касаются, причём ни одна из них не содержит внутри себя другую сферу, что говорят, что они касаются *внешним образом*. Если же одна из них содержит внутри себя другую, то говорят, что они касаются *внутренним образом*.

4.14. Сферы S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 касаются внешним образом в точках A, B, C, D соответственно.

а) Докажите, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

б) Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

4.15. Четыре сферы попарно касаются внешним образом. Докажите, что шесть точек касания лежат на одной сфере или в одной плоскости.

См. также задачи 2.27, 18.13.

§ 5. Угол между сферами

Углом между двумя пересекающимися сферами называют угол между касательными плоскостями к этим сферам в точке пересечения. В частности, две пересекающиеся сферы называют *ортогональными*, если касательные плоскости к этим сферам в точке пересечения ортогональны.

4.16. Докажите, что сфера радиуса R_1 с центром O_1 ортогональна сфере радиуса R_2 с центром O_2 тогда и только тогда, когда $R_1^2+R_2^2=$ $=O_1O_2^2$.

4.17. Даны точка A и сфера S. Докажите, что сфера с центром A, ортогональная сфере S, существует тогда и только тогда, когда точка A расположена вне сферы S.

См. также задачи 20.5, 20.9, 20.10, 20.13.

§ 6. Разные задачи

4.18. Даны сфера, окружность на ней и точка P, не принадлежащая сфере. Докажите, что вторые точки пересечения сферы с прямыми, соединяющими точку P с точками сферы, лежат на одной окружности.

4.19. Введём систему координат с началом O в центре земного шара, осями Ox и Oy, проходящими через точки экватора с долготой 0° и 90° соответственно, и осью Oz, проходящей через северный полюс. Какие координаты имеет точка земной поверхности с широтой φ и долготой ψ? (Землю мы рассматриваем как шар радиуса R; в южном полушарии широту считаем отрицательной.)

4.20. Рассмотрим все точки поверхности земного шара, географическая широта которых равна их долготе. Найдите геометрическое место проекций этих точек на плоскость экватора.

4.21. В пространстве расположены три плоскости и сфера. Сколькими различными способами можно поместить в пространстве вторую сферу, чтобы она касалась трёх данных плоскостей и первой сферы?

§ 7. Площадь сферической полоски и объём шарового сегмента

Шаровой сегмент — это фигура, отсекаемая от шара некоторой плоскостью (рис. 4.1). *Высота* h шарового сегмента — это расстояние между секущей плоскостью и параллельной ей касательной плоскостью к сегменту. Точка касания этой касательной плоскости с сегментом (т. е. точка сегмента, наиболее удалённая от секущей плоскости) — это *вершина* сегмента.

Шаровой сектор — это фигура, состоящая из шарового сегмента и конуса, вершина которого — центр сферы, а основание — основание шарового сегмента (рис. 4.2). *Высота* h шарового сектора — это высота соответствующего ему шарового сектора.

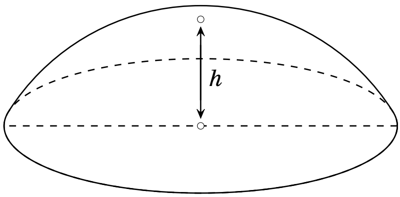


Рис. 4.1

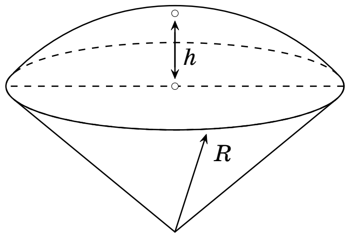


Рис. 4.2

4.22. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно h, пересекают сферу радиуса R. Докажите, что площадь поверхности части сферы, заключённой между ними, равна $2\pi Rh$.

4.23. Пусть A — вершина шарового сегмента, B — точка окружности его основания. Докажите, что площадь сферической части поверхности этого сегмента равна площади круга радиуса AB.

4.24. Пусть h — высота шарового сектора, R — радиус шара. Докажите, что объём шарового сектора равен $2\pi R^2\frac{h}{3}$.

4.25. Пусть h — высота шарового сегмента, R — радиус шара. Докажите, что объём шарового сегмента равен $\pi h^2\frac{3R-h}{3}$.

4.26. Докажите, что объём тела, полученного при вращении сегмента круга относительно не пересекающего его диаметра, равен $\pi a^2\frac{h}{6}$, где a — длина хорды этого сегмента, h — длина проекции этой хорды на диаметр.

4.27. Золотое колечко имеет форму тела, ограниченного поверхностью шара и цилиндра (рис. 4.3). Сколько золота нужно добавить, чтобы увеличить диаметр d в k раз, а высоту h оставить прежней?

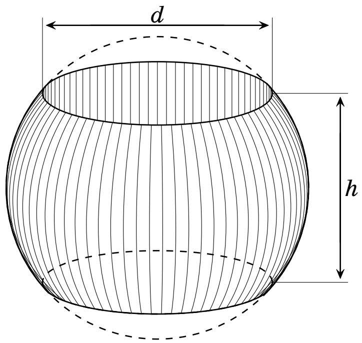


Рис. 4.3

4.28. Центр сферы S_1 принадлежит сфере S_2, причём эти сферы пересекаются. Докажите, что площадь части поверхности S_2, находящейся внутри S_1, равна $\frac{1}{4}$ площади поверхности S_1.

4.29. Некоторый 20-гранник описан около сферы радиуса 10. Докажите, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше 21.

§ 8. Радикальная плоскость

Пусть прямая l, проходящая через точку O, пересекает сферу S в точках A и B. Легко проверить, что произведение длин отрезков OA и OB зависит лишь от сферы S и точки O; от выбора прямой l оно не зависит. Для точек, лежащих вне сферы, это произведение равно длине касательной, проведённой к сфере S из точки O. Легко проверить, произведение длин отрезков OA и OB равно $\pm(d^2 - R^2)$, где d — расстояние от точки O до центра сферы, а R — радиус сферы. (Знак плюс берётся для точек вне сферы, а знак минус — для точек внутри сферы.) Величину $d^2 - R^2$ называют *степенью* точки O относительно сферы S.

4.30. Даны две неконцентрические сферы. Докажите, что геометрическое место точек, степени которых относительно этих сфер равны, представляет собой плоскость.

Плоскость из задачи 4.30 называют *радикальной плоскостью* двух сфер.

4.31. Докажите, что радикальная плоскость двух пересекающихся сфер проходит через окружность, по которой они пересекаются.

4.32. Даны четыре сферы, центры которых не лежат в одной плоскости. Для каждой пары этих сфер проведём радикальную плоскость. Докажите, что все эти радикальные плоскости пересекаются в одной точке.

Точку из задачи 4.32 называют *радикальным центром* четырёх сфер. Степени радикального центра относительно всех четырёх данных сфер равны, поэтому он лежит либо внутри всех сфер, либо вне их (либо является их общей точкой).

4.33. а) Докажите, что если радикальный центр O четырёх сфер лежит вне их, то существует сфера с центром O, ортогональная всем четырём сферам.

б) Докажите, что если радикальный центр O четырёх сфер лежит внутри их, то существует сфера с центром O, которую все четыре сферы пересекают по большим окружностям.

4.34. К двум неконцентрическим сферам проведены общие касательные AB и CD. Докажите, что длины проекций отрезков AC и BD на прямую, соединяющую центры сфер, равны.

4.35. Найдите геометрическое место середин общих касательных к двум данным непересекающимся сферам.

4.36. Внутри выпуклого многогранника расположено несколько непересекающихся шаров различных радиусов. Докажите, что этот многогранник можно разрезать на меньшие выпуклые многогранники, каждый из которых содержит ровно один из данных шаров.

См. также задачи 5.20, 5.21.

§ 9. Полюс и полярная плоскость

Пусть задана некоторая сфера S. *Полярное соответствие* относительно сферы S сопоставляет любой точке, отличной от её центра, *полярную плоскость* и наоборот, любой плоскости, не проходящей через центр сферы, сопоставляет точку — *полюс*. Полярное соответствие можно определить несколькими эквивалентными способами. Проще всего определить полярное соответствие в координатах для сферы, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2=R^2$. А именно, точке (x_0, y_0, z_0) сопоставляется плоскость $x_0x+y_0y+z_0z=R^2$, а плоскости $x_0x+y_0y+z_0z=R^2$ сопоставляется точка (x_0, y_0, z_0). Другое определение полярного соответствия даёт задача 4.40. Ещё одно определение полярного соответствия, важное для проективной геометрии, приведено в задаче 4.45.

Полярную плоскость точки A мы будем обозначать $A^\perp$, а полюс плоскости π будем обозначать $\pi^\perp$.

Непосредственно из определения полярного соответствия следует, что полюс полярной плоскости точки A совпадает с исходной точкой, а полярная плоскость полюса плоскости π совпадает с исходной плоскостью. Обратите внимание, что это свойство далеко не очевидно, если пользоваться определениями полярного соответствия, приведёнными в задачах 4.40 и 4.45.

4.37. Докажите, что полярная плоскость точки A относительно сферы с центром O радиуса R получается следующим образом: на луче OA строим точку A^*, для которой $OA \cdot OA^* = R^2$, и через точку A^* проводим плоскость, перпендикулярную OA.

Замечание. Точка A^* получается из точки A инверсией относительно данной сферы.

4.38. а) Докажите, что $A_1 \in A_2^\perp$ тогда и только тогда, когда $A_2 \in A_1^\perp$.

б) Докажите, что $\pi_1 \ni \pi_2^\perp$ тогда и только тогда, когда $\pi_2 \ni \pi_1^\perp$.

4.39. а) Докажите, что если точка движется по прямой l, то полярная ей плоскость вращается вокруг некоторой прямой $l^\perp$.

б) Докажите, что $(l^\perp)^\perp = l$.

Прямые l и $l^\perp$ из задачи 4.39 называют *полярными*.

4.40. Докажите, что при гомотетии с центром A и коэффициентом 2 радикальная плоскость сферы S и точки A (рассматриваемой как сфера радиуса 0 с центром A) переходит в полярную плоскость точки A относительно сферы S.

4.41. а) Пусть точка A лежит на сфере S. Докажите, что полярная плоскость точки A относительно сферы S — это касательная плоскость к сфере S в точке A.

б) Пусть точка A лежит вне сферы S. Докажите, что полярная плоскость точки A относительно сферы S — это плоскость, содержащая все точки касания сферы S с прямыми, проведёнными из точки A.

4.42. Возьмём произвольную точку плоскости π, лежащую вне сферы S, проведём из неё все касательные к сфере S и через точки касания проведём плоскость. Докажите, что все такие плоскости проходят через одну и ту же точку.

4.43. Докажите, что две окружности на сфере ортогональны тогда и только тогда, когда поляра плоскости одной окружности лежит в плоскости другой окружности.

4.44. Пусть l и $l^\perp$ — полярные прямые (относительно сферы S). Плоскости окружностей C_1 и C_2, лежащих на сфере S, пересекаются по прямой l. Докажите, что окружность C на сфере S ортогональна окружностям C_1 и C_2 тогда и только тогда, когда её плоскость содержит прямую $l^\perp$.

Двойным отношением четырёх точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называют число $[A, B, C, D] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$, где a, b, c, d — координаты данных точек на прямой. Точки A и P называют *гармонически сопряжёнными* относительно точек X_1 и X_2, если $[X_1, X_2, A, P] = -1$ (предполагается, что все четыре рассматриваемые точки лежат на одной прямой).

4.45. Даны сфера S и точка A, отличная от центра сферы. Прямая, проведённая через точку A, пересекает сферу S в точках X_1 и X_2. Докажите, что точка P, гармонически сопряжённая с точкой A относительно точек X_1 и X_2, лежит на полярной плоскости точки A относительно сферы S.

Решения

4.1. Докажем сначала, что длина общей касательной к двум касающимся окружностям радиусов R и r равна $2\sqrt{Rr}$. Рассмотрим для этого прямоугольный треугольник, концы гипотенузы которого — центры окружностей, а один из катетов параллелен общей касательной. Применяя к этому треугольнику теорему Пифагора, получим $x^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2$, где x — длина общей касательной. Отсюда $x = 2\sqrt{Rr}$.

Прямые, соединяющие точки A и B с центрами соответствующих им шаров, параллельны, поскольку они перпендикулярны данной плоскости. Поэтому можно рассмотреть сечение, проходящее через центры данных шаров и точки A и B. Это сечение показывает, что полученная выше формула справедлива и в нашем случае.

4.2. Пусть x, y и z — радиусы шаров. Согласно задаче 4.1 имеем $a = 2\sqrt{xy}$, $b = 2\sqrt{yz}$ и $c = 2\sqrt{xz}$. Поэтому $\frac{ac}{b} = 2x$, т. е. $x = \frac{ac}{2b}$. Аналогично $y = \frac{ab}{2c}$ и $z = \frac{bc}{2a}$.

4.3. Пусть MN — общая касательная, A и B — центры шаров. Радиусы AM и BN перпендикулярны касательной MN. Пусть C — проекция точки A на плоскость, проходящую через точку N перпендикулярно MN (рис. 4.4). Так как $NB = r$ и $NC = R$, то BC может изменяться от $R + r$ до $|R - r|$. Поэтому величина $MN^2 = AC^2 = AB^2 - BC^2$ может изменяться от $a^2 - (R+r)^2$ до $a^2 - (R-r)^2$.

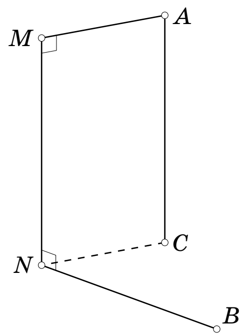


Рис. 4.4

З а м е ч а н и е. Для пересекающихся шаров верхний предел длины MN остаётся таким же, а нижний равен 0.

4.4. Рассмотрим сначала данный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Конус с осью AC_1 и образующей AB касается сферы, касающейся всех рёбер данного куба. Поэтому конус с осью AB и образующей AC_1 касается сферы, касающейся всех рёбер куба с диагональю AB; в частности, этой сферы касается диагональ AC_1.

Эти рассуждения показывают, что любая из четырёх прямых, проходящих через данную точку параллельно какой-либо диагонали данного куба, касается всех полученных шаров.

4.5. Рассмотрим плоскость Π', проходящую через середину отрезка AD перпендикулярно ему. Касательные CA и CD равны, поэтому точка C лежит в плоскости Π'. Угол ADF прямой, поэтому плоскость Π' проходит через середину отрезка AF. Покажем теперь, что прямая l, по которой пересекаются плоскости Π и Π', перпендикулярна прямой AF. Прямая AD перпендикулярна плоскости Π', поэтому она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости; в частности, она перпендикулярна прямой l. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах $AF \perp l$. Таким образом, прямая l, на которой лежит точка C, является серединным перпендикуляром к отрезку AF, поэтому $CA = CF$.

4.6. Ответ: 120°. Заметим сначала, что если две плоскости, пересекающиеся по прямой AX, касаются сферы с центром O в точках F и G, то AOX — биссекторная плоскость двугранного угла, образованного плоскостями AOF и AOG. В самом деле, точки F и G симметричны относительно плоскости AOX.

Пусть плоскость AKN касается вписанной в куб сферы в точке P, а прямая AP пересекает прямую NK в точке M. Применяя сформулированное выше утверждение к касательным плоскостям, проходящим через прямую NA, получаем, что AC_1N — биссекторная плоскость двугранного угла, образованного плоскостями AC_1D_1 и AC_1M. Аналогично AC_1K — биссекторная плоскость, двугранного угла, образованного плоскостями AC_1M и AC_1B_1. Следовательно, угол между плоскостями AC_1N и AC_1K вдвое меньше двугранного угла, образованного полуплоскостями AC_1D_1 и AC_1B_1. Рассматривая проекцию на плоскость, перпендикулярную AC_1, получаем, что двугранный угол, образованный полуплоскостями AC_1D_1 и AC_1B_1, равен 120°.

4.7. Пусть O — центр данной сферы, R — её радиус, M — точка пересечения касательных, проведённых из точек A и B. Если мы проведём из точки A все возможные касательные к сфере, то точки касания лежат в одной плоскости α. Пусть прямая AM касается сферы в точке K. Проведём в плоскости AOK вторую касательную AL к сфере и опустим перпендикуляр MX на прямую LK. Ясно, что угол $\varphi = \angle AKL$ не зависит от точки M. Обозначим через $d(M, \alpha)$ расстояние от точки M до плоскости α. Тогда

$$OM^2 = OK^2 + MK^2 = R^2 + \frac{d(M, \alpha)^2}{\sin^2 \varphi}.$$

Аналогично для точки B рассмотрим плоскость β и получим

$$OM^2 = R^2 + \frac{d(M, \beta)^2}{\sin^2 \psi}.$$

Приравнивая два выражения для OM^2 и вычитая из обеих частей R^2, получаем $d(M, \alpha) : d(M, \beta) = \sin \psi : \sin \varphi$. Это условие задаёт две плоскости, проходящие через прямую пересечения плоскостей α и β (или параллельные им обеим, если $\alpha \parallel \beta$).

4.8. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей; в задаче 4.8 (а) пусть M — середина отрезка AB, а в задаче 4.8 (б) пусть M — точка касания окружностей. Рассмотрим плоскость MO_1O_2. Центром искомой сферы является точка пересечения перпендикуляров, восставленных в этой плоскости из точек O_1 и O_2 к прямым MO_1 и MO_2.

4.9. Описанные окружности двух боковых граней имеют две общие точки — общие вершины этих граней. Поэтому согласно задаче 4.8 существует сфера, содержащая обе эти окружности. Описанной окружностью третьей грани является сечение этой сферы плоскостью грани.

4.10. Рассмотрим какую-нибудь вершину многогранника и ещё три вершины — концы выходящих из неё рёбер. Через эти 4 точки можно провести сферу. Такие сферы можно построить для каждой вершины многогранника, и поэтому достаточно доказать, что для соседних вершин эти сферы совпадают.

Пусть P и Q — соседние вершины. Рассмотрим описанные окружности двух граней с общим ребром PQ. И точка P, и концы выходящих из неё трёх рёбер принадлежат хотя бы одной из этих окружностей. То же самое верно и для точки Q. Остаётся заметить, что через две окружности, имеющие две общие точки и не лежащие в одной плоскости, можно провести сферу, причём единственную.

4.11. Произведение длин отрезков, на которые каждая из трёх хорд делится точкой их пересечения, равно произведению длин отрезков, на которые делится точкой пересечения общая хорда, а значит, все эти произведения равны. Если отрезки AB и CD пересекаются в точке O, а $AO \cdot OB = CO \cdot OD$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Следовательно, концы первой и второй хорды, а также концы второй и третьей хорды лежат на одной окружности. Вторая хорда принадлежит обеим этим окружностям, а значит, эти окружности принадлежат одной сфере.

4.12. Если все окружности проходят через некоторые две точки, то всё доказано. Поэтому можно считать, что есть три окружности, причём третья окружность не проходит хотя бы через одну из точек пересечения первых двух окружностей. Докажем, что тогда эти три окружности принадлежат одной сфере (или плоскости). Согласно задаче 4.8 (а) первые две окружности принадлежат одной сфере (или плоскости). Третья окружность пересекает первую окружность в двух точках. Эти две точки не могут совпасть с двумя точками пересечения третьей окружности со второй, так как иначе все три окружности проходили бы через две точки. Поэтому третья окружность имеет по крайней мере три общие точки со сферой, заданной первыми двумя окружностями. Следовательно, третья окружность принадлежит этой сфере.

Возьмём теперь какую-нибудь четвёртую окружность. Её точки пересечения с первой окружностью могут, конечно, совпасть с её точками пересечения со второй окружностью, но тогда они уже не могут совпасть с её точками пересечения с третьей окружностью. Поэтому четвёртая окружность имеет по крайней мере три общие точки со сферой, заданной первыми двумя окружностями, а значит, принадлежит ей.

4.13. Пусть сфера (или плоскость) α содержит первую и вторую окружности, сфера (или плоскость) β — вторую и третью. Предположим, что α и β не совпадают. Тогда их линией пересечения является вторая окружность. Кроме того, общая точка первой и третьей окружностей тоже принадлежит линии пересечения α и β, т.е. второй окружности, а значит, все три окружности имеют общую точку. Получено противоречие.

4.14. а) Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры сфер S_1, S_2, S_3, S_4, а R_1, R_2, R_3, R_4 — их радиусы. Тогда

$$\frac{O_1A}{AO_2}\cdot\frac{O_2B}{BO_3}\cdot\frac{O_3C}{CO_4}\cdot\frac{O_4D}{DO_1}=\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{R_2}{R_3}\cdot\frac{R_3}{R_4}\cdot\frac{R_4}{R_1}=1.$$

Поэтому согласно задаче 5.6 точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

б) В плоскости, содержащей точки A, B, C, D, мы получаем четыре окружности, касающиеся внешним образом в этих точках. Поэтому можно воспользоваться соответствующим фактом из планиметрии («Задачи по планиметрии», задача 3.23).

Замечание. Другое доказательство приведено в решении задачи 20.18.

4.15. Пусть сферы S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 касаются в точках A, B, C, D соответственно. Согласно задаче 4.14 точки A, B, C, D лежат на одной окружности C_1. Пусть сферы S_1 и S_3, S_2 и S_4 касаются в точках E, F соответственно. Согласно задаче 4.14 точки A, E, C, F тоже лежат на одной окружности C_2. Окружности C_1 и C_2 пересекаются в точках A и C. Если эти окружности лежат в одной плоскости, то всё доказано. Если же они не лежат в одной плоскости, то согласно задаче 4.8 они лежат на одной сфере; эти окружности содержат все шесть точек касания.

Замечание. Другое доказательство приведено в решении задачи 20.17.

4.16. Ортогональность касательных плоскостей в точке пересечения эквивалентна ортогональности радиусов, проведённых из центров окружностей в точку касания. Ортогональность же этих радиусов эквивалентна равенству $R_1^2+R_2^2=O_1O_2^2$.

4.17. Пусть O и R — центр и радиус сферы S. Согласно задаче 4.16 сфера радиуса x с центром A ортогональна сфере S тогда и только тогда, когда $x^2+R^2=OA^2$. Поэтому требуемое число x существует тогда и только тогда, когда $OA>R$.

4.18. Пусть A и B — две точки данной окружности, A_1 и B_1 — вторые точки пересечения прямых PA и PB со сферой; l — касательная к описанной окружности треугольника PAB в точке P. Тогда $\angle(l, AP)=\angle(BP, AB)=$ $=\angle(A_1B_1, AP)$, т.е. $A_1B_1\parallel l$. Рассмотрим плоскость П, которая проходит через точку A_1 параллельно плоскости, касающейся в точке P сферы, проходящей через данную окружность и точку P. Все искомые точки лежат в плоскости Π.

Замечание. По поводу другого решения см. задачу 20.12.

4.19. Пусть $P=(x, y, z)$ — данная точка земной поверхности, P' — её проекция на плоскость экватора. Тогда $z=R\sin\varphi$ и $OP'=R\cos\varphi$. Следовательно, $x=OP'\cos\psi=R\cos\varphi\cos\psi$ и $y=R\cos\varphi\sin\psi$. Итак,

$$P=(R\cos\varphi\cos\psi, R\cos\varphi\sin\psi, R\sin\psi).$$

4.20. Введём такую же систему координат, как и в задаче 4.19. Если широта и долгота точки P равны φ, то $P=(R\cos^2\varphi, R\cos\varphi\sin\varphi, R\sin\varphi)$. Проекция этой точки на плоскость экватора имеет координаты $x=R\cos^2\varphi$ и $y=R\cos\varphi\sin\varphi$. Легко проверить, что $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$,

т. е. искомое множество — окружность радиуса $\frac{R}{2}$ с центром $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$.

4.21. Пусть O и R — центр и радиус данной сферы S. Предположим, что сфера S_1 с центром O_1 касается данной сферы и трёх данных плоскостей. Сопоставим сфере S_1 сферу S_1' с центром O_1 и радиусом O_1O. Сфера S_1' проходит через данную точку O и касается трёх плоскостей, удалённых от данных плоскостей на расстояние R. Для каждой плоскости есть ровно две плоскости, удалённых от неё на расстояние R. Поэтому сфера S_1' проходит через данную точку O и касается тройки плоскостей, причём есть $2^3=8$ различных таких троек.

Легко проверить, что существует не более двух сфер, проходящих через данную точку и касающихся трёх данных плоскостей. В случае, когда три данные плоскости пересекаются в одной точке, это доказывается следующим образом. Впишем сферу в тот трёхгранный угол, который образован данными плоскостями и содержит данную точку. Проведём прямую, соединяющую данную точку и точку пересечения данных плоскостей. Искомые сферы соответствуют точкам пересечения этой прямой с данной сферой, а таких точек не более двух. Отдельно рассматривается случай, когда данная точка лежит на одной из данных плоскостей. Кроме того, нужно рассмотреть два более простых случая: 1) есть две параллельные плоскости, и их пересекает третья плоскость; 2) прямые пересечения плоскостей параллельны. (Легко видеть, что если все три плоскости параллельны или пересекаются по одной прямой, то сфера не может касаться трёх таких плоскостей.)

В итоге мы получаем, что существует не более 16 сфер S_1'. По сфере S_1' сфера S_1 восстанавливается не однозначно. Чтобы её восстановить, нужно взять точку O', в которой прямая OO_1 пересекает сферу S; сфера S_1 — это сфера с центром O_1 и радиусом O_1O'. Точек пересечения сферы с прямой, проходящей через её центр, две, поэтому мы получаем две сферы. Но лишь одна из них может касаться трёх данных плоскостей (вторая сфера касается других плоскостей). Поэтому существует не более 16 сфер, касающихся данной сферы и трёх данных плоскостей.

Покажем теперь, что при различных расположениях данных плоскостей и данной сферы количество сфер, касающихся их, может быть любым целым числом от 0 до 16. Будем считать, что данные плоскости пересекаются по трём параллельным прямым, причём расстояния между этими прямыми попарно различны. Сферы, касающиеся трёх данных плоскостей, заметают четыре цилиндра, соответствующих вписанной и трём вневписанным окружностям треугольника, который образуется при пересечении данных плоскостей плоскостью, ортогональной всем трём данным плоскостям. Эти цилиндры не имеют общих точек, в том числе и точек касания.

Рассмотрим цилиндр и точку вне его. Рассмотрим семейство сфер S_R с центром в выбранной точке. Нас интересуют сферы, вписанные в цилиндр и касающиеся сферы S_R. Если радиус R сферы S_R мал, то таких сфер нет. Будем увеличивать радиус R до тех пор, пока сфера S_R не коснётся цилиндра. В этом случае количество искомых сфер равно 1. Будем снова увеличивать радиус R. Когда сфера S_R пересечёт цилиндр, количество искомых сфер станет равно 2. Затем сфера S_R будет пересекать цилиндр и ещё касаться его в одной точке. В этом случае количество искомых сфер равно 3. Если же радиус R увеличить ещё больше, то количество искомых сфер будет равно 4.

Эти замечания показывают, что если мы выберем точку вне данных четырёх цилиндров и рассмотрим семейство сфер S_R с центром в выбранной точке, то при постепенном увеличении радиуса R мы получим конфигурации, для которых число искомых сфер последовательно изменяется от 0 до 16. Нужно лишь позаботиться о том, чтобы не появлялись одновременно две точки касания сферы S_R с цилиндрами.

4.22. Рассмотрим сначала усечённый конус, боковая поверхность которого касается шара радиуса R с центром O, причём точки касания делят образующие конуса пополам, и докажем, что площадь его боковой поверхности равна $2\pi Rh$, где h — высота этого конуса. Пусть AB — образующая усечённого конуса; C — середина отрезка AB (точка касания этого отрезка со сферой); L — основание перпендикуляра, опущенного из C на ось конуса. Согласно задаче 3.32 площадь боковой поверхности усечённого конуса равна $2\pi CL \cdot AB$, а так как угол между прямой AB и осью конуса равен углу между CO и CL, получаем, что $AB : h = CO : CL$, т. е.

$$CL \cdot AB = CO \cdot h = Rh.$$

Утверждение задачи доказывается теперь предельным переходом: заменим рассматриваемую часть поверхности сферы фигурой, состоящей из боковых поверхностей нескольких усечённых конусов, для которых точки касания со сферой делят образующие пополам; когда высоты этих конусов стремятся к нулю, площадь поверхности этой фигуры стремится к площади рассматриваемой части сферы.

4.23. Пусть M — центр основания шарового сегмента, h — высота сегмента, O — центр шара, R — радиус шара. Тогда $AM = h$, $MO = R - h$ и $BM \perp AO$. Следовательно, $AB^2 - AM^2 = BM^2 = BO^2 - OM^2$, т. е. $AB^2 = h^2 + R^2 - (R - h)^2 = 2Rh$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 4.22.

4.24. Объём шарового сектора равен $S\frac{R}{3}$, где S — площадь сферической части поверхности сектора. Согласно задаче 4.22 получаем $S = 2\pi Rh$.

4.25. Шаровой сегмент вместе с соответствующим конусом с вершиной в центре шара составляют шаровой сектор. Объём шарового сектора равен $2\pi R^2\frac{h}{3}$ (задача 4.24). Высота конуса равна $R - h$, а квадрат радиуса его основания равен $R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2$, поэтому его объём равен $\pi(R-h)\frac{2Rh - h^2}{3}$. Вычитая из объёма шарового сектора объём конуса, получаем требуемое.

4.26. Пусть AB — хорда данного сегмента, O — центр круга, x — расстояние от O до AB, R — радиус круга. Объём тела, полученного при вращении сектора AOB вокруг диаметра, равен $\frac{RS}{3}$, где S — площадь поверхности, полученной при вращении дуги AB. Согласно задаче получаем 4.22 $S = 2\pi Rh$. Из решения той же задачи следует, что объём тела, полученного при вращении треугольника AOB, равен $2\pi x^2\frac{h}{3}$ (для доказательства следует заметить, что часть поверхности этого тела, полученная при вращении отрезка AB, касается сферы радиуса x, причём для отрезка AB точка касания — его середина).

Итак, искомый объём равен

$$2\pi R^2\frac{h}{3} - 2\pi x^2\frac{h}{3} = 2\pi\left(x^2 + \frac{a^2}{4}\right)\frac{h}{3} - 2\pi x^2\frac{h}{3} = \pi a^2\frac{h}{6}.$$

4.27. Согласно задаче 4.26 объём колечка равен $\pi\frac{h^3}{6}$, т. е. он не зависит от d.

4.28. Пусть O_1 и O_2 — центры сфер S_1 и S_2, R_1 и R_2 — их радиусы. Пусть, далее, A — точка пересечения сфер, AH — высота треугольника O_1AO_2. Внутри S_1 находится сегмент сферы S_2 с высотой O_1H. Так как $O_1O_2 = AO_2 = R_2$ и $O_1A = R_1$, то $2O_1H : R_1 = R_1 : R_2$, т. е. $O_1H = \frac{R_1^2}{2R_2}$. Согласно задаче 4.22 площадь поверхности рассматриваемого сегмента равна $2\pi R_2 \cdot O_1H = 2\pi R_2 \cdot \frac{R_1^2}{2R_2} = \pi R_1^2$.

4.29. Рассмотрим описанный около сферы радиуса 10 многогранник, расстояние между любыми двумя точками поверхности которого не превосходит 21, и докажем, что число его граней больше 20. Заметим для начала, что этот многогранник расположен внутри сферы радиуса 11, центр которой совпадает с центром O вписанной сферы. В самом деле, если для некоторой точки A поверхности многогранника $OA > 11$, то пусть B — вторая точка пересечения поверхности многогранника с прямой OA. Тогда $AB = AO + OB > 11 + 10 = 21$, чего не может быть.

Каждая плоскость грани отсекает от сферы радиуса 11 «шапочку» площадью $2\pi R(R-r)$, где $R = 11$ и $r = 10$ (см. задачу 4.22). Такие «шапочки» покрывают всю сферу, поэтому $n \cdot 2\pi R(R-r) \geqslant 4\pi R^2$, где n — число граней. Следовательно, $n \geqslant 2R/(R-r) = 22 > 20$.

4.30. Введём систему координат с началом в центре первой сферы и осью Ox, проходящей через центр второй сферы. Пусть радиусы первой и второй сфер равны R_1 и R_2, а расстояние между их центрами равно a. Тогда степени точки (x, y, z) относительно первой и второй сфер равны $x^2+y^2+z^2-R_1^2$ и $(x-a)^2+y^2+z^2-R_2^2$, поэтому искомое ГМТ задаётся уравнением

$$x^2+y^2+z^2-R_1^2=(x-a)^2+y^2+z^2-R_2^2,$$

т. е. $x=\dfrac{a^2+R_1^2-R_2^2}{2a}$. Это уравнение задаёт плоскость, перпендикулярную прямой, соединяющей центры сфер.

4.31. Степень точки пересечения двух сфер относительно каждой из этих сфер равна нулю, поэтому она принадлежит радикальной плоскости.

4.32. Радикальные плоскости первой и второй, первой и третьей, первой и четвёртой сфер пересекаются в одной точке A. Степени точки A относительно всех четырёх данных сфер равны, поэтому радикальные плоскости второй и третьей, второй и четвёртой, третьей и четвёртой сфер тоже проходят через точку A.

4.33. а) Касательные, проведённые из точки O к данным сферам, равны. Сфера с центром O, радиус которой равен длине этих касательных, ортогональна всем данным сферам.

б) Пусть O_i — центр данной сферы S_i, R_i — её радиус. Проведём через точку O хорду A_iB_i сферы S_i, перпендикулярную отрезку OO_i. Пусть d_i — расстояние между точками O и O_i. Тогда $A_iB_i^2=4(R_i^2-d_i^2)=-4(d_i^2-R_i^2)$. Число $d_i^2-R_i^2$ равно степени точки O относительно сферы S_i, поэтому для всех данных сфер оно одно и то же. Сферу с центром O и диаметром A_iB_i все данные сферы пересекают по большим окружностям.

4.34. Пусть M — середина отрезка AB. Точка M лежит в радикальной плоскости данных сфер, потому что касательные MA и MB равны. Поэтому проекция точки M на прямую, соединяющую центры сфер, совпадает с точкой O пересечения этой прямой с радикальной плоскостью. Аналогично доказывается, что середина отрезка CD тоже проецируется в точку O. Поэтому проекции отрезков AC и BD симметричны относительно точки O.

4.35. Середины общих касательных к двум данным сферам принадлежат их радикальной плоскости. Пусть O_1 и O_2 — центры данных сфер, M — середина общей касательной, N — точка пересечения радикальной плоскости с прямой O_1O_2. Рассмотрим сечение данных сфер плоскостью, проходящей через точки O_1 и O_2. Проведём внешнюю и внутреннюю касательные к окружностям, полученным в сечении; пусть P и Q — середины этих касательных. Докажем, что $NQ\leqslant NM\leqslant NP$. Действительно,

$$NM^2=O_1M^2-O_1N^2=\frac{x^2}{4}+R_1^2-O_1N^2,$$

где x — длина касательной, а согласно задаче 4.3 длина касательной к двум сферам заключена между длиной внешней касательной и длиной внутренней касательной. Таким образом, искомое ГМТ представляет собой кольцо, расположенное в радикальной плоскости, с внешним радиусом NP и внутренним радиусом NQ.

4.36. Рассмотрим границы данных шаров — сферы $S_1, \ldots, S_n$. Для каждой сферы S_i рассмотрим фигуру M_i, состоящую из тех точек, степень которых относительно S_i не больше степени относительно всех остальных данных сфер. Докажем, что фигура M_i выпуклая. Рассмотрим для этого фигуру M_{ij}, состоящую из точек, степень которых относительно сферы S_i не больше степени относительно сферы S_j. Фигура M_{ij} является полупространством, которое ограничено радикальной плоскостью и содержит сферу S_i. Фигура M_i является пересечением полупространств M_{ij}, поэтому она выпуклая. Ясно также, что она содержит сферу S_i, поскольку её содержит каждая из фигур M_{ij}. Для любой точки пространства какая-то из её степеней относительно сфер $S_1, \ldots, S_n$ является наименьшей, поэтому фигуры M_i покрывают всё пространство. Взяв их части, лежащие внутри исходного многогранника, получаем требуемое разбиение.

4.37. Можно считать, что точка O является началом координат. Пусть точка A имеет координаты (x_0, y_0, z_0). Тогда точка A', в которой полярная плоскость точки A пересекает прямую OA, имеет координаты $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$, где $\lambda x_0^2 + \lambda y_0^2 + \lambda z_0^2 = R^2$, т. е. $\lambda = \dfrac{R^2}{OA^2}$. Остаётся заметить, что $OA' = \lambda OA = \dfrac{R^2}{OA}$, т. е. $A' = A^*$.

4.38. а) Пусть точки A_1 и A_2 имеют координаты (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Оба условия эквивалентны соотношению $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = R^2$.

б) Пусть плоскости π_1 и π_2 задаются уравнениями $x_1x + y_1y + z_1z = R^2$ и $x_2x + y_2y + z_2z = R^2$. Оба условия эквивалентны соотношению $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = R^2$.

4.39. а) Зададим прямую l параметрически: $x_0 = a_0 + a_1t$, $y_0 = b_0 + b_1t$, $z_0 = c_0 + c_1t$, где $a_0, \ldots, c_1$ — константы, а t — параметр. Полярная плоскость точки (x_0, y_0, z_0) задаётся уравнением

$$(a_0 + a_1t)x + (b_0 + b_1t)y + (c_0 + c_1)z = R^2.$$

Каждая такая плоскость проходит через прямую $l^\perp$, по которой пересекаются плоскости $a_0x + b_0y + c_0z = R^2$ и $a_1x + b_1y + c_1z = 0$. (Эти плоскости не параллельны, поскольку рассматриваемся прямая не может проходить через начало координат.)

б) Пусть точка (x_1, y_1, z_1) лежит на прямой $l^\perp$, т. е. она удовлетворяет системе уравнений $a_0x_1 + b_0y_1 + c_0z_1 = R^2$ и $a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 = 0$. Полярная плоскость точки (x_1, y_1, z_1) задаётся уравнением $x_1x + y_1y + z_1z = R^2$. Для любого t эта плоскость содержит точку (x_0, y_0, z_0), где $x_0 = a_0 + a_1t$, $y_0 = b_0 + b_1t$, $z_0 = c_0 + c_1t$. Таким образом, полярная плоскость точки (x_1, y_1, z_1), движущейся по прямой $l^\perp$, всегда содержит прямую l. Это означает, что $(l^\perp)^\perp = l$.

4.40. Пусть точка A имеет координаты (x_0, y_0, z_0), а сфера S задаётся уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Если при гомотетии с центром (x_0, y_0, z_0) точка (x, y, z) переходит в точку (x', y', z'), то $x' + x_0 = 2x$, $y' + y_0 = 2y$, $z' + z_0 = 2z$. Требуется доказать, что при замене $x' = 2x - x_0$, $y' = 2y - y_0$, $z' = 2z - z_0$ полярная плоскость $x_0x' + y_0y' + z_0z' = R^2$ переходит в радикальную плоскость сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и точки (x_0, y_0, z_0). Эта радикальная плоскость задаётся уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

т. е. $2(x_0x + y_0y + z_0z) = R^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$. Требуемое теперь легко проверяется.

4.41. а) Достаточно заметить, что если точка (x_0, y_0, z_0) лежит на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, то касательная плоскость в этой точке задаётся уравнением $x_0x + y_0y + z_0z = R^2$ (задача 11.6 (а)).

б) Согласно задаче 4.40 достаточно проверить, что середины касательных, проведённых из точки A к сфере S, принадлежат радикальной плоскости точки A и сферы S. Но это очевидно.

4.42. Согласно задаче 4.41 (б) для каждой точки $A \in \pi$, лежащей вне сферы S, строится плоскость $A^\perp$. Из того, что $A \in \pi$, следует, что $\pi^\perp \in A^\perp$ (задача 4.38). Таким образом, все построенные плоскости проходят через точку $\pi^\perp$.

4.43. Предположим сначала, что окружности C и C', лежащие на сфере S, пересекаются под прямым углом в точках M и N. Пусть касательные в точках M и N к окружности C' пересекаются в точке A. Прямые AM и AN касаются сферы и ортогональны окружности C, поэтому точка A — вершина конуса, касающегося сферы по окружности C. Это означает, что A — поляра плоскости, в которой лежит окружность C.

Предположим теперь, что плоскость окружности C' проходит через поляру A плоскости окружности C, т. е. через вершину конуса, касающегося сферы S по окружности C. Плоскость окружности C' пересекает этот конус по двум образующим AM и AN или касается его. Случай касания невозможен, поскольку тогда окружность C' должна была бы состоять из одной точки — точки касания сферы и плоскости. Образующие AM и AN касаются окружности C' и ортогональны окружности C, поэтому окружности C и C' ортогональны.

4.44. Пусть π_1 и π_2 — плоскости окружностей C_1 и C_2. По условию плоскости π_1 и π_2 содержат прямую l, поэтому точки $\pi_1^\perp$ и $\pi_2^\perp$ лежат на прямой $l^\perp$, причём эти две точки полностью задают эту прямую. Согласно задаче 4.43 окружность C ортогональна окружностям C_1 и C_2 тогда и только тогда, когда точки $\pi_1^\perp$ и $\pi_2^\perp$ лежат в плоскости окружности C, т. е. прямая $l^\perp$ лежит в плоскости окружности C.

4.45. Пусть x_1, x_2, a, p — координаты точек X_1, X_2, A, P на рассматриваемой прямой. Из соотношения $\dfrac{a - x_1}{a - x_2} : \dfrac{p - x_1}{p - x_2} = -1$ получаем

$$p = \frac{ax_1 + ax_2 - 2x_1x_2}{2a - x_1 - x_2}.$$

Пусть теперь p' — координата точки данной прямой, в которую переходит точка радикальной плоскости точки A и сферы S при гомотетии с центром A

и коэффициентом 2. Это означает, что точка $\frac{a+p'}{2}$ принадлежит радикальной плоскости. Для точки y, которая является точкой данной прямой и радикальной плоскости, получаем уравнение $(y-x_1)(y-x_2)=(y-a)^2$. Подставив в это уравнение $y=\frac{a+p'}{2}$, находим $p'=\frac{ax_1+ax_2-2x_1x_2}{2a-x_1-x_2}$, т. е. $p=p'$. Согласно задаче 4.40 это означает, что точка P лежит на полярной плоскости.

ГЛАВА 5

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Пространственный многоугольник — это набор точек A_1, A_2, …, A_n (не лежащих в одной плоскости), соединённых отрезками A_1A_2, A_2A_3, … …, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1.

§ 1. Середины сторон пространственного четырёхугольника

5.1. Докажите, что середины сторон пространственного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

5.2. Докажите, что центр параллелограмма из задачи 5.1 совпадает с серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей четырёхугольника.

См. также задачи 11.2, 11.3, 11.42.

§ 2. Пространственный четырёхугольник

5.3. Плоскости, перпендикулярные сторонам пространственного четырёхугольника, задают тетраэдр. Докажите, что площади граней этого тетраэдра пропорциональны длинам перпендикулярных им сторон четырёхугольника.

5.4. Докажите, что противолежащие стороны пространственного четырёхугольника $ABCD$ попарно равны тогда и только тогда, когда его противолежащие углы попарно равны.

См. также задачи 15.17, 18.6.

§ 3. Обобщённая теорема Менелая

5.5. Плоскость пересекает стороны пространственного многоугольника $A_1 \dots A_n$ (или их продолжения) в точках $B_1, \dots, B_n$; точка B_i лежит на прямой A_iA_{i+1}. Докажите, что

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_1}\cdot\frac{A_2B_2}{A_3B_2}\cdot\ldots\cdot\frac{A_nB_n}{A_1B_n}=1,$$

причём на сторонах многоугольника (а не на их продолжениях) лежит чётное число точек B_i.

5.6. На сторонах AB, BC, CA и AD пространственного четырёхугольника $ABCD$ выбраны точки K, L, M и N соответственно. Докажите, что эти точки лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{AK}{BK}\cdot\frac{BL}{CL}\cdot\frac{CM}{DM}\cdot\frac{DN}{AN}=1.$$

См. также задачи 4.14, 5.15.

§ 4. Разные задачи

5.7. Дана замкнутая пространственная ломаная с вершинами A_1, A_2, ..., A_n, причём каждое звено пересекает фиксированную сферу в двух точках, а все вершины ломаной лежат вне сферы. Эти точки делят ломаную на $3n$ отрезков. Известно, что отрезки, прилегающие к вершине A_1, равны между собой. То же самое верно и для вершин A_2, A_3, ..., A_{n-1}. Докажите, что отрезки, прилегающие к вершине A_n, также равны между собой.

5.8. Даны четыре прямые, никакие три из которых не параллельны одной плоскости. Докажите, что существует пространственный четырёхугольник, стороны которого параллельны этим прямым, причём отношение сторон, параллельных соответствующим прямым, для всех таких четырёхугольников одно и то же.

5.9. а) Сколько существует попарно не равных пространственных четырёхугольников с одним и тем же набором векторов сторон?

б) Докажите, что объёмы всех тетраэдров, задаваемых этими пространственными четырёхугольниками, равны.

5.10. Стороны пространственного четырёхугольника $KLMN$ перпендикулярны граням тетраэдра $ABCD$, а их длины равны площадям соответствующих граней. Найдите объём тетраэдра $KLMN$, если объём тетраэдра $ABCD$ равен V.

5.11. В пространстве даны точки A, B, C и D, причём $AB=BC=CD$ и $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\alpha$. Найдите угол между прямыми AC и BD.

5.12. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_5$ — середины сторон $A_3A_4, A_4A_5, \ldots, A_2A_3$ пространственного пятиугольника $A_1 \ldots A_5$;

$$\overrightarrow{A_iP_i} = \left(1 + \sqrt{\frac{1}{5}}\right)\overrightarrow{A_iB_i} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{A_iQ_i} = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)\overrightarrow{A_iB_i}.$$

Докажите, что как точки P_i, так и точки Q_i лежат в одной плоскости.

5.13. Докажите, что пятиугольник, все стороны и углы которого равны, является плоским.

См. также задачи 2.19, 2.20.

§ 5. Описанные многоугольники

5.14. В пространственном четырёхугольнике $ABCD$ суммы противоположных сторон равны. Докажите что существует сфера, касающаяся всех его сторон и диагонали AC.

5.15. Около сферы описан пространственный четырёхугольник. Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

5.16. На сторонах AB, BC, CD и DA пространственного четырёхугольника $ABCD$ (или на их продолжениях) можно выбрать точки K, L, M и N так, что $AN = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ и $DM = DN$. Докажите, что тогда существует сфера, касающаяся прямых AB, BC, CD и DA.

5.17. Пусть a, b, c и d — длины сторон AB, BC, CD и DA пространственного четырёхугольника $ABCD$.

а) Докажите, что если не выполняется ни одно из трёх соотношений $a + b = c + d$, $a + c = b + d$ и $a + d = b + c$, то существует ровно 8 различных сфер, касающихся прямых AB, BC, CD и DA.

б) Докажите, что если выполняется хотя бы одно из указанных соотношений, то существует бесконечно много различных сфер, касающихся прямых AB, BC, CD и DA.

§ 6. Ортологические треугольники

5.18. В пространстве расположены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что плоскости, проходящие через вершины треугольника ABC перпендикулярно соответственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, имеют общую прямую. Докажите, что тогда плоскости, проходящие через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярно соответственным сторонам треугольника ABC, тоже имеют общую прямую.

Треугольники из задачи 5.18 называют *ортологическими*.

5.19. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ ортологические. Точки A_2, B_2, C_2 делят отрезки AA_1, BB_1, CC_1 в отношении $t:(1-t)$. Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ тоже ортологические.

§ 7. Ортологические четырёхугольники

Предварительно нам потребуются два специальных свойства степени точки относительно сферы (задачи 5.20 и 5.21).

5.20. Пусть точки A и B равноудалены от радикальной плоскости двух сфер и расположены по разные стороны от этой плоскости. Докажите, что сумма степеней этих точек относительно одной сферы равна сумме их степеней относительно другой сферы.

5.21. Даны четыре сферы с центрами A, B, C, D и радиусами R_a, R_b, R_c, R_d и четыре сферы с центрами A', B', C', D' и радиусами R'_a, R'_b, R'_c, R'_d. Пусть (AB) — разность между суммой степеней точек A и B относительно сферы с центром A' и суммой степеней точек A и B относительно сферы с центром B'. Аналогично определим (BC) и т. д. Докажите, что $(AB)+(BC)+(CD)+(DA)+(A'B')+(B'C')+(C'D')+(D'A')=0$.

5.22. Пространственные четырёхугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ обладают следующим свойством: плоскости, проходящие через середины сторон первого четырёхугольника перпендикулярно соответственным сторонам второго четырёхугольника, пересекаются в одной точке. Докажите, что тогда плоскости, проходящие через середины сторон второго четырёхугольника перпендикулярно соответственным сторонам первого четырёхугольника, тоже пересекаются в одной точке.

Пространственные четырёхугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ из задачи 5.22 называют *ортологическими*.

5.23. Пространственные четырёхугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ обладают следующим свойством: плоскости, проходящие через середины сторон первого четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам второго четырёхугольника, пересекаются в одной точке. Докажите, что тогда плоскости, проходящие через середины сторон второго четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам первого четырёхугольника, тоже пересекаются в одной точке.

Решения

5.1. Пусть A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины сторон AB, BC, CD и DA. Тогда $A_1B_1 \parallel AC$ и $C_1D_1 \parallel AC$, поэтому $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ (в частности, точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат в одной плоскости). Аналогично $B_1C_1 \parallel A_1D_1$.

5.2. Пусть A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины сторон AB, BC, CD и DA. Пусть, далее, P и Q — середины диагоналей AC и BD. Тогда отрезки A_1Q и PC_1 параллельны отрезку AD, причём длина каждого из этих отрезков равна половине длины отрезка AD. Следовательно, A_1PC_1Q — параллелограмм, а потому середина отрезка A_1C_1 совпадает с серединой отрезка PQ.

5.3. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ — единичные векторы внешних нормалей к граням BCD, ACD, ABD и ABC полученного тетраэдра. Согласно задаче 11.30 имеем

$$S_{BCD}\boldsymbol{a} + S_{ACD}\boldsymbol{b} + S_{ABD}\boldsymbol{c} + S_{ABC}\boldsymbol{d} = \vec{0}.$$

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ не лежат в одной плоскости, поэтому если их сумма с какими-то коэффициентами равна нулю, то эти коэффициенты определены однозначно с точностью до пропорциональности. Остаётся заметить, что

$$a\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{b} + c\boldsymbol{c} + d\boldsymbol{d} = \vec{0},$$

где a, b, c и d — длины сторон пространственного четырёхугольника.

5.4. Если $AB = CD$ и $BC = AD$, то треугольники ABC и CDA равны, поэтому $\angle ABC = \angle CDA$. Аналогично $\angle BAD = \angle DCB$.

Предположим теперь, что $\angle ABC = \angle CDA$ и $\angle BAD = \angle DCB$. Рассмотрим тетраэдр $abcd$, грани которого перпендикулярны сторонам четырёхугольника $ABCD$, а именно $AB \perp bcd$, $BC \perp cda$, $CD \perp dab$ и $DA \perp abc$. По условию угол между плоскостями bcd и cda равен углу между плоскостями dab и abc, т. е. двугранный угол при ребре cd равен двугранному углу при ребре ab. Кроме того, двугранный угол при ребре bc равен двугранному углу при ребре ad. Из равенства двух пар двугранных углов следует равенство трёхгранных углов $abcd$ и $cdab$ (двугранный угол при ребре ac у этих трёхгранных углов общий). Из равенства трёхгранных углов следует равенство их соответственных плоских углов. В частности, $\angle bac = \angle dca$ и $\angle acb = \angle cad$, поэтому $\Delta abc = \Delta cda$. Аналогично $\Delta dab = \Delta bcd$. Остаётся заметить, что согласно задаче 5.3 площади треугольников abc, bcd, cda и dab пропорциональны длинам сторон DA, AB, BC и CD.

5.5. Рассмотрим проекцию на прямую, перпендикулярную данной плоскости. Все точки B_i проецируются при этом в одну точку B, а точки $A_1, \ldots, A_n$ — в $C_1, \ldots, C_n$. Так как отношения отрезков, лежащих на одной прямой, при проецировании сохраняются, то

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_1} \cdot \frac{A_2B_2}{A_3B_2} \ldots \frac{A_nB_n}{A_1B_n} = \frac{C_1B}{C_2B} \cdot \frac{C_2B}{C_3B} \ldots \frac{C_nB}{C_1B} = 1.$$

Данная плоскость разбивает пространство на две части. Идя из вершины A_i в A_{i+1}, мы переходим из одной части пространства в другую, только если точка B_i лежит на стороне A_iA_{i+1}. Так как, совершив обход многоугольника, мы вернёмся в исходную часть пространства, то число точек B_i, лежащих на сторонах многоугольника, чётно.

5.6. Рассмотрим точку N', в которой плоскость KLM пересекает прямую DA. Согласно задаче 5.5 имеем

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN'}{AN'} = 1.$$

Согласно той же задаче точка N' лежит на отрезке AD, поскольку точки K, L и M лежат на сторонах четырёхугольника, а не на их продолжениях.

Точки K, L, M и N лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $N=N'$. Обе точки N и N' лежат на отрезке AD, поэтому $N=N'$ тогда и только тогда, когда $DN':AN'=DN:AN$.

5.7. Отрезки, прилегающие к вершине A_i, где $i=1, 2, \ldots n-1$, равны. По теореме о произведении отрезков секущих, проведённых из одной точки, отрезки тех же звеньев, лежащие внутри сферы, тоже равны между собой. Следовательно, все отрезки, лежащие внутри сферы, равны между собой, поскольку для соседних вершин один из отрезков является общим. Поэтому они равны и для звеньев с вершиной A_n, но тогда по той же теореме прилегающие к A_n отрезки этих звеньев тоже равны между собой.

5.8. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ — векторы, параллельные данным прямым. Так как любые три вектора в пространстве, не лежащие в одной плоскости, образуют базис, то существуют такие ненулевые числа α, β и γ, что $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\overrightarrow{0}$. Векторы $\alpha\boldsymbol{a}$, $\beta\boldsymbol{b}$, $\gamma\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ являются сторонами искомого четырёхугольника. Пусть теперь $\alpha_1\boldsymbol{a}$, $\beta_1\boldsymbol{b}$, $\gamma_1\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ — векторы сторон другого такого четырёхугольника. Тогда $\alpha_1\boldsymbol{a}+\beta_1\boldsymbol{b}+\gamma_1\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\overrightarrow{0}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$, т. е. $(\alpha_1-\alpha)\boldsymbol{a}+((\beta_1-\beta)\boldsymbol{b}+(\gamma_1-\gamma)\boldsymbol{c}=\overrightarrow{0}$. Так как векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не лежат в одной плоскости, то $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$ и $\gamma=\gamma_1$.

5.9. а) Фиксируем один из векторов сторон. За ним может следовать любой из трёх оставшихся векторов, а за ним любой из двух оставшихся. Поэтому всего различных четырёхугольников ровно 6.

б) Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ — данные векторы сторон. Рассмотрим параллелепипед, задаваемый векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (рис. 5.1); его диагональю служит вектор $\boldsymbol{d}$. Несложный перебор показывает, что все шесть различных четырёхугольников содержатся среди четырёхугольников, сторонами которых являются рёбра этого параллелепипеда и его диагональ d (фиксировать при переборе удобно вектор $\boldsymbol{d}$). Объём каждого соответствующего тетраэдра составляет $\frac{1}{6}$ часть объёма параллелепипеда.

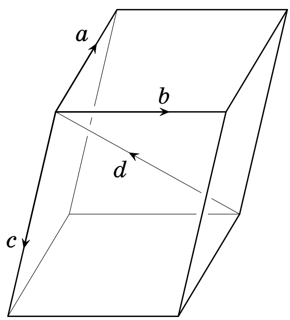


Рис. 5.1

5.10. Существование такого пространственного четырёхугольника $KLMN$ для любого тетраэдра $ABCD$ следует из утверждения задачи 11.30; таких четырёхугольников несколько, но объёмы всех задаваемых ими тетраэдров равны (задача 5.9).

Воспользовавшись формулой из задачи 3.2, легко доказать, что

$$V^3=\left(\frac{abc}{6}\right)^3 p^2q,$$

где a, b и c — длины рёбер, выходящих из вершины A; p — произведение синусов плоских углов при вершине A, q — произведение синусов двугранных углов трёхгранного угла при вершине A. Опустим из произвольной точки O, лежащей внутри тетраэдра $ABCD$, перпендикуляры на грани, выходящие из вершины A, и отложим на них отрезки OP, OQ и OR, равные площадям этих граней. Из решения задачи 5.9 следует, что объём W тетраэдра $OPQR$ равен объёму тетраэдра $KLMN$. Плоские (соответственно двугранные) углы трёхгранного угла $OPQR$ дополняют до 180° двугранные (соответственно плоские) углы трёхгранного угла $ABCD$ (см. задачу 6.1). Следовательно, $W^3 = \left(\frac{S_1S_2S_3}{6}\right)^3 q^2p$, где S_1, S_2, S_3 — площади граней, выходящих из вершины A. Так как $S_1S_2S_3 = \frac{(abc)^2p}{8}$, то $W^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)^3(abc)^6p^4q^2 = \left(\frac{3}{4}V^2\right)^3$, т. е. $W = \frac{3}{4}V^2$.

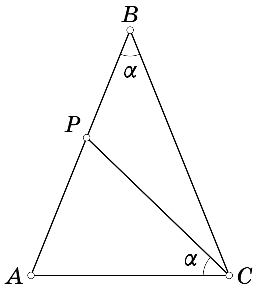


Рис. 5.2

5.11. В треугольниках ABC и CDA равны стороны AB и CD и углы B и D, а сторона AC у них общая. Если $\Delta ABC = \Delta CDA$, то $AC \perp BD$. Рассмотрим теперь случай, когда эти треугольники не равны. Возьмём на луче BA точку P так, что $\Delta CBP = \Delta CDA$, т. е. $CP = CA$ (рис. 5.2). Она может не совпасть с точкой A, только если $\angle ABC < \angle APC = \angle BAC$, т. е. $\alpha < 60^\circ$. В этом случае $\angle ACD = \angle PCB = \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2}$. Следовательно, $\angle ACD + \angle DCB = \left(90^\circ - \frac{3\alpha}{2}\right) + \alpha = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle ACB$. Поэтому точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, причём точка D лежит внутри угла ACB. Так как $\Delta ABC = \Delta DCB$ и эти треугольники равнобедренные, то угол между прямыми AC и BD равен α.

Итак, если $\alpha > 60^\circ$, то $AC \perp BD$, а если $\alpha < 60^\circ$, то либо $AC \perp BD$, либо угол между прямыми AC и BD равен α.

5.12. Пусть $\overrightarrow{A_iX_i} = \lambda\overrightarrow{A_iB_i}$. Достаточно проверить, что при $\lambda = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}$ стороны пятиугольника $X_1 \dots X_5$ параллельны его противоположным диагоналям. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ — векторы сторон $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, …, $\overrightarrow{A_5A_1}$. Тогда $\overrightarrow{A_1X_1} = \lambda\left(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)$, $\overrightarrow{A_1X_2} = \boldsymbol{a} + \lambda\left(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{d}\right)$, $\overrightarrow{A_1X_3} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \lambda\left(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}\right)$, $\overrightarrow{A_1X_4} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \lambda\left(\boldsymbol{d} + \boldsymbol{e} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)$ и $\overrightarrow{A_1X_5} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \lambda\left(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)$. Поэтому $\overrightarrow{X_1X_3} = \overrightarrow{A_1X_3} - \overrightarrow{A_1X_1} = (1-\lambda)\boldsymbol{a} + (1-\lambda)\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{d} + \frac{\lambda}{2}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}) = \left(1 - \frac{3\lambda}{2}\right)\boldsymbol{a} + \left(1 - \frac{3\lambda}{2}\right)\boldsymbol{b} + \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{d}$, $\overrightarrow{X_4X_5} = \overrightarrow{A_1X_5} - \overrightarrow{A_1X_4} = \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{a} + \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{b} + (1-\lambda)\boldsymbol{d}$. Значит, $X_1X_3 \parallel X_4X_5$ тогда и только тогда, когда $\frac{2-3\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2-2\lambda}$, т. е. $5\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0$. Это уравнение имеет корни $1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}$.

5.13. Первое решение. Предположим, что данный пятиугольник $A_1 \dots A_5$ не плоский. Выпуклая оболочка его вершин либо является четырёхугольной пирамидой, либо состоит из двух тетраэдров с общей гранью. В обоих случаях можно считать, что вершины A_1 и A_4 лежат по одну сторону от плоскости $A_2A_3A_5$ (см. рис. 5.3). Из условия задачи следует, что диагонали данного пятиугольника равны, поэтому равны тетраэдры $A_4A_2A_3A_5$ и $A_1A_3A_2A_5$. А так как точки A_1 и A_4 лежат по одну сторону от грани $A_2A_3A_5$ (равнобедренного треугольника), точки A_1 и A_4 симметричны относительно плоскости, проходящей через середину отрезка A_2A_3 перпендикулярно ему. Следовательно, точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат в одной плоскости.

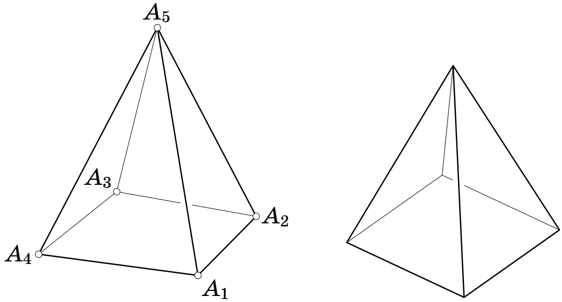


Рис. 5.3

Рассматривая теперь равные (плоские) тетраэдры $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_5A_4A_3$, приходим к противоречию.

Второе решение. Тетраэдры $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_5A_4A_3$ равны, так как равны их соответствующие рёбра. Эти тетраэдры симметричны либо относительно плоскости, проходящей через середину отрезка A_1A_2 перпендикулярно ему, либо относительно прямой A_4M, где M — середина отрезка A_1A_2. В первом случае диагональ A_3A_5 параллельна A_1A_2, поэтому четыре вершины пятиугольника лежат в одной плоскости. Если есть две диагонали с таким свойством, то пятиугольник плоский. Если же есть четыре диагонали со вторым свойством, то две из них выходят из одной вершины, например A_3. Пусть M и K — середины сторон A_1A_2 и A_4A_5, L и N — середины диагоналей A_1A_3 и A_3A_5. Так как отрезок A_3A_5 симметричен относительно прямой A_4M, его середина N принадлежит этой прямой. Поэтому точки A_4, M, N, A_3 и A_5 лежат в одной плоскости; в той же плоскости лежит и середина K отрезка A_4A_5. Аналогично в одной плоскости лежат точки A_2, K, L, A_3, A_1 и M. Следовательно, все вершины пятиугольника лежат в плоскости A_3KM.

5.14. Пусть вписанные окружности S_1 и S_2 треугольников ABC и ADC касаются стороны AC в точках P_1 и P_2 соответственно. Тогда $AP_1 = \frac{AB + AC - BC}{2}$ и $AP_2 = \frac{AD + AC - CD}{2}$. Так как $AB - BC = AD - CD$ по условию, то $AP_1 = AP_2$, т. е. точки P_1 и P_2 совпадают. Следовательно, окружности S_1 и S_2 принадлежат одной сфере (см. задачу 4.8)

5.15. Пусть сфера касается сторон AB, BC, CA и AD в точках K, L, M и N соответственно. Тогда $AN=AK$, $BK=BL$, $CL=CM$ и $DM=DN$. Поэтому
$$\frac{AK}{BK}\cdot\frac{BL}{CL}\cdot\frac{CM}{DM}\cdot\frac{DN}{AN}=1.$$
Остаётся воспользоваться результатом задачи 5.6.

5.16. Так как $AN=AK$, то в плоскости DAB существует окружность S_1, касающаяся прямых AD и AB в точках N и K. Аналогично в плоскости ABC существует окружность S_2, касающаяся прямых AB и BC в точках K и L. Докажем, что сфера, содержащая окружности S_1 и S_2, искомая. Эта сфера касается прямых AD, AB и BC в точках N, K и L (в частности, точки B, C и D лежат вне этой сферы). Остаётся проверить, что сфера касается прямой CD в точке M.

Пусть S_3 — сечение данной сферы плоскостью BCD, DN' — касательная к S_3. Так как $DC=\pm DM\pm MC$, а $DM=DN=DN'$ и $MC=CL$, то длина отрезка DC равна сумме или разности длин касательных, проведённых из точек C и D к окружности S_3. Это означает, что прямая CD касается окружности S_3. В самом деле, пусть $a=d^2-R^2$, где d — расстояние от центра окружности S_3 до прямой CD и R — радиус окружности S_3; P — основание перпендикуляра, опущенного из центра окружности S_3 на прямую CD; $x=CP$ и $y=DP$. Тогда длины касательных CL и DN' равны $\sqrt{x^2+a}$ и $\sqrt{y^2+a}$. Пусть $|\sqrt{x^2+a}\pm\sqrt{y^2+a}|=|x\pm y|\neq 0$. Докажем, что тогда $a=0$. Возведя обе части в квадрат, получим $\sqrt{(x^2+a)(y^2+a)}=\pm xy\pm a$. Еще раз возведя в квадрат, получим $a(x^2+y^2)=\pm 2axy$. Если $a\neq 0$, то $(x\pm y)^2=0$, т. е. $x=\pm y$. Равенство $2|\sqrt{x^2+a^2}|=2|x|$ выполняется, только если $a=0$.

5.17. а) Введём на прямых AB, BC, CD и DA координаты, взяв в качестве начала координат точки A, B, C и D соответственно, а в качестве положительных направлений — направления лучей AB, BC, CD и DA. В соответствии с результатом задачи 5.16 будем искать на прямых AB, BC, CD и DA такие точки K, L, M и N, что $AN=AK$, $BK=BL$, $CL=CM$ и $DM=DN$, т. е. $\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{AN}=\alpha\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{y}$, $\overrightarrow{BK}=\beta\boldsymbol{y}$, $\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{z}$, $\overrightarrow{CL}=\gamma\boldsymbol{z}$, $\overrightarrow{DN}=\boldsymbol{u}$ и $\overrightarrow{DM}=\delta\boldsymbol{u}$, где $\alpha,\beta,\gamma,\delta=\pm 1$. Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}$, то $a=x-\beta y$. Аналогично $b=y-\gamma z$, $c=z-\delta u$ и $d=u-\alpha x$. Следовательно, $u=d+\alpha x$, $z=c+\delta d+\delta\alpha x$, $y=b+\gamma c+{}$ $+\gamma\delta d=\gamma\delta\alpha x$ и $x=a+\beta b+\beta\gamma c+\beta\gamma\delta d+\beta\gamma\delta\alpha x$. Из последнего соотношения получаем $(1-\alpha\beta\gamma\delta)x=a+\beta b+\beta\gamma c+\beta\gamma\delta d$. Итак, если $1-\alpha\beta\gamma\delta=0$, то выполняется соотношение вида $a\pm b\pm c\pm d=0$; ясно также, что соотношение $a-b-c-d=0$ выполняться не может. Следовательно, в нашем случае $\alpha\beta\gamma\delta\neq 1$, а значит, $\alpha\beta\gamma\delta=-1$. Числа $\alpha,\beta,\gamma=\pm 1$ можно задавать произвольно, а число δ определяется этими числами. Всего существует восемь различных наборов чисел α, β, γ, δ, причём для каждого набора существует единственное решение x, y, z, u. Кроме того, все числа x, y, z, u отличны от нуля, поэтому все восемь решений различны.

б) Первое решение. Разберём, например, случай, когда $a+c=b+d$, т. е. $a-b+c-d=0$. В этом случае следует положить $\beta=-1$, $\beta\gamma=1$, $\beta\gamma\delta=-1$ и $\alpha\beta\gamma\delta=1$, т. е. $\alpha=\beta=\gamma=\delta=-1$. Рассматриваемая в решении задачи (а) система уравнений для x, y, z, u имеет бесконечно много решений: $u = d - x$, $z = c - d + x$ и $y = b - c + d - x = a - x$, где число x произвольно.

Остальные случаи разбираются аналогично: если $a + b = c + d$, то $\alpha = \gamma = -1$ и $\beta = \delta = 1$, а если $a + d = b + c$, то $\alpha = \gamma = 1$ и $\beta = \delta = -1$.

В т о р о е р е ш е н и е. В каждом из трёх случаев, когда выполняются указанные соотношения, можно построить такую четырёхугольную пирамиду с вершиной B, что её боковые рёбра равны и параллельны сторонам данного четырёхугольника, основанием является параллелограмм, а суммы длин противоположных рёбер равны (см. рис. 5.4). Поэтому существует луч, с которым рёбра пирамиды — а значит, и стороны четырёхугольника — образуют равные углы (задача 9.7). Пусть плоскость Π, перпендикулярная этому лучу, пересекает прямые AB, BC, CD и DA в точках P, Q, R и S, а соответственные боковые рёбра пирамиды — в точках P', Q', R' и S'. Так как точки P', Q', R' и S' лежат на одной окружности, а прямые PQ и $P'Q'$, QR и $Q'R'$ и т. д. параллельны, то $\angle(PQ, PS) = \angle(P'Q', P'S') = \angle(R'Q', R'S') = \angle(RQ, RS)$, т. е. точки P, Q, R и S лежат на одной окружности (см. «Задачи по планиметрии», с. 30); пусть O — центр этой окружности. Так как прямые AP а AS образуют с плоскостью Π равные углы, то $AP = AS$. Следовательно, соответственные стороны треугольников APO и ASO равны, а значит, равны расстояния от точки O до прямых AB и AD. Аналогично доказывается, что точка O равноудалена от всех прямых AB, BC, CD и DA, т. е. сфера с центром O, радиус которой равен расстоянию от точки O до этих прямых, искомая. Перемещая плоскость Π параллельно, получаем бесконечное множество сфер.

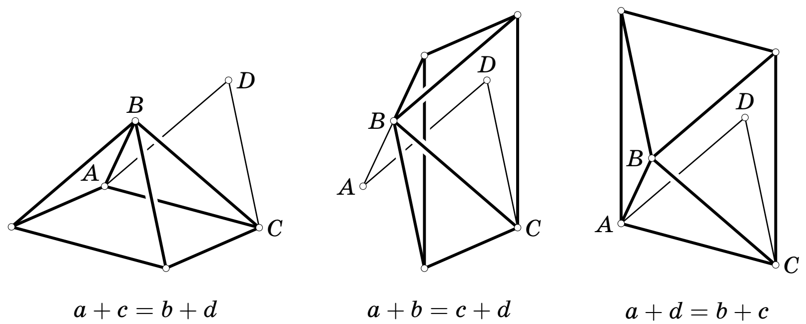


Рис. 5.4

З а м е ч а н и е. Для каждой вершины пространственного четырёхугольника $ABCD$ можно рассмотреть две биссекторные плоскости, проходящие через биссектрисы его внешнего и внутреннего угла перпендикулярно им. Ясно, что O — точка пересечения биссекторных плоскостей. По одной прямой пересекаются следующие четвёрки биссекторных плоскостей: в случае $a + c = b + d$ все четыре внутренние; в случае $a + b = c + d$ — внутренние при вершинах A и C

и внешние при вершинах B и D; в случае $a+d=b+c$ — внутренние при вершинах B и D и внешние при вершинах A и C.

5.18. Согласно задаче 1.29 плоскость, проведённая через точку A перпендикулярно прямой B_1C_1, состоит из точек X, для которых $XB_1^2-XC_1^2=AB_1^2-AC_1^2$. Аналогично плоскость, проведённая через точку B перпендикулярно прямой A_1C_1, состоит из точек X, для которых $XC_1^2-XA_1^2=BC_1^2-BA_1^2$. Складывая эти два уравнения, получаем, что любая точка X, принадлежащая прямой, по которой пересекаются эти плоскости, удовлетворяет уравнению $XB_1^2-XA_1^2=$ $=AB_1^2-AC_1^2+BC_1^2-BA_1^2$. Эта прямая принадлежит плоскости $XB_1^2-XA_1^2=$ $=CB_1^2-CA_1^2$ тогда и только тогда, когда

$$AB_1^2+BC_1^2+CA_1^2=AC_1^2+BA_1^2+CB_1^2.$$

Это условие симметрично по отношению к треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$.

5.19. Пусть O — произвольная точка, $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$, $\boldsymbol{a}_1=\overrightarrow{AA_1}$, $\boldsymbol{b}_1=\overrightarrow{BB_1}$, $\boldsymbol{c}_1=\overrightarrow{CC_1}$. Тогда равенство $AB_1^2+BC_1^2+CA_1^2=A_1B^2+B_1C^2+C_1A^2$ можно записать в виде

$$(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{b}_1)^2+(-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{c}_1)^2+(-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{a}_1)^2=$$
$$=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}_1)^2+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{b}_1)^2+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{c}_1)^2.$$

Постоянные члены взаимно уничтожаются; члены с коэффициентом t^2 тоже взаимно уничтожаются. В оставшемся после этого равенстве t можно вынести за скобки, поэтому если оно выполняется для $t=1$, то оно выполняется для всех t.

5.20. Пусть A' и B' — центры данных сфер, R_a' и R_b' — их радиусы. Требуется доказать, что

$$(AA'^2-R_a'^2)+(BA'^2-R_a'^2)-(AB'^2-R_b'^2)-(BB'^2-R_b'^2)=0.$$

Разность $AA'^2-AB'^2$ зависит только от проекции точки A на прямую $A'B'$. Введём на прямой $A'B'$ систему координат так, чтобы началом координат служила точка пересечения этой прямой и радикальной плоскости. Точки A и B равноудалены от радикальной плоскости, поэтому их проекции на прямую $A'B'$ имеют координаты x и $-x$. Кроме того, $R_a'^2-R_b'^2=a'^2-b'^2$, где a' и b' — координаты точек A' и B'. Таким образом, нужно доказать, что

$$(a'-x)^2-(b'-x)^2+(a'+x)^2-(b'+x)^2=2(a'^2-b'^2).$$

Это равенство легко проверяется.

5.21. По определению

$$(AB)=(AA'^2-R_a'^2)+(BA'^2-R_a'^2)-(AB'^2-R_b'^2)-(BB'^2-R_b'^2).$$

Запишем такие же выражения для (BC), (CD), (DA) и сложим все четыре выражения. В результате все квадраты радиусов взаимно уничтожаются, и слагаемые вида AA'^2 тоже взаимно уничтожаются; останется сумма слагаемых вида $A'B^2-AB'^2$. Аналогичное выражение для $(A'B')+(B'C')+(C'D')+(D'A')$ представляет собой сумму слагаемых вида $AB'^2-A'B^2$.

5.22. Пусть плоскости, проходящие через середины сторон первого четырёхугольника перпендикулярно соответственным сторонам второго четырёхугольника, пересекаются в точке O'. Рассмотрим сферы с центрами A', B', C' и D', проходящие через точку O'. Для них можно определить числа (AB), (BC), (CD) и (DA), как в задаче 5.21. Ясно, что радикальная плоскость рассматриваемых сфер с центрами A' и B' — это плоскость, проходящая через середину стороны AB перпендикулярно стороне $A'B'$. Точки A и B равноудалены от этой плоскости и лежат по разные стороны от неё, поэтому согласно задаче 5.20 получаем $(AB)=0$. Таким образом, $(AB)+(BC)+(CD)+(DA)=0$.

Три плоскости, проходящие через середины сторон $A'B'$, $B'C'$ и $C'D'$ перпендикулярно соответственным сторонам первого четырёхугольника, пересекаются в некоторой точке O_1. Рассмотрим сферы с центрами в точках A, B, C и D, проходящие через точку O_1. Для них тоже можно определить числа $(A'B')$, $(B'C')$, $(C'D')$ и $(D'A')$, как в задаче 5.21. Точно так же, как мы доказали равенство $(AB)=0$, можно доказать равенства $(A'B')=0$, $(B'C')=0$ и $(C'D')=0$. Но согласно задаче 5.21 мы имеем

$$(A'B')+(B'C')+(C'D')+(D'A') = -((AB)+(BC)+(CD)+(DA)) = 0,$$

поэтому $(D'A')=0$. Решение задачи 5.20 показывает, что это равенство эквивалентно тому, что радикальная плоскость рассматриваемых сфер с центрами D и A проходит через середину стороны $D'A'$. Таким образом, точка O_1 — это и есть искомая точка O.

5.23. Изменим обозначение вершин второго четырёхугольника следующим образом: $A'=C''$, $B'=D''$, $C'=A''$ и $D'=B''$. Тогда, например, сторона $A'B'$, соответственная стороне AB, заменяется на сторону $C''D''$, противоположную ей. Поэтому требуемое утверждение непосредственно следует из задачи 5.22.

ГЛАВА 6

ТРЁХГРАННЫЕ И МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Для трёхгранного угла $SABC$ с вершиной S мы будем обозначать его плоские углы BSC, CSA и ASB через α, β и γ, а двугранные углы при рёбрах BC, CA и AB через A, B и C.

§ 1. Полярный трёхгранный угол

Возьмём внутри трёхгранного угла $SABC$ точку S' и опустим из неё перпендикуляры $S'A'$, $S'B'$ и $S'C'$ на грани SBC, SCA и SAB соответственно. Полученный при этом трёхгранный угол $S'A'B'X'$ называют *полярным* к трёхгранному углу $SABC$.

6.1. Докажите, что полярный к полярному трёхгранному углу равен исходному трёхгранному углу.

6.2. Плоские углы трёхгранного угла $SABC$ равны α, β и γ, а его двугранные углы равны A, B и C. Докажите, что плоские углы полярного угла равны $\pi - A$, $\pi - B$ и $\pi - C$, а его двугранные углы равны $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ и $\pi - \gamma$.

6.3. Докажите, что если двугранные углы трёхгранного угла прямые, то его плоские углы тоже прямые.

6.4. Докажите, что трёхгранные углы равны, если равны их соответственные двугранные углы.

§ 2. Неравенства с трёхгранными углами

6.5. Докажите, что сумма двух плоских углов трёхгранного угла больше третьего плоского угла.

6.6. Докажите, что сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 2π, а сумма его двугранных углов больше π.

6.7. Докажите, что трёхгранный угол с плоскими углами α, β, γ существует тогда и только тогда, когда каждый из этих углов меньше суммы двух других, а сумма всех трёх углов меньше 2π.

6.8. Луч SC' лежит внутри трёхгранного угла $SABC$ с вершиной S. Докажите, что сумма плоских углов трёхгранного угла $SABC$ больше суммы плоских углов трёхгранного угла $SABC'$.

§ 3. Теоремы синусов и косинусов

6.9. Пусть α, β и γ — плоские углы трёхгранного угла, A, B и C — противолежащие им двугранные углы. Докажите, что $\sin\alpha : \sin A = \sin\beta : \sin B = \sin\gamma : \sin C$ (*теорема синусов для трёхгранного угла*).

6.10. Пусть α, β и γ — плоские углы трёхгранного угла, A, B и C — противолежащие им двугранные углы.

а) Докажите, что $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$ (*первая теорема косинусов для трёхгранного угла*).

б) Докажите, что $\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha$ (*вторая теорема косинусов для трёхгранного угла*).

6.11. Плоские углы трёхгранного угла равны α, β и γ; противолежащие им рёбра образуют с плоскостями граней углы a, b и c. Докажите, что $\sin\alpha\sin a = \sin\beta\sin b = \sin\gamma\sin c$.

6.12. а) Докажите, что если все плоские углы трёхгранного угла тупые, то и все его двугранные углы тоже тупые.

б) Докажите, что если все двугранные углы трёхгранного угла острые, то и все его плоские углы тоже острые.

§ 4. Разные задачи

6.13. Дан трёхгранный угол с вершиной O. Существует ли такое плоское сечение ABC, что все углы OAB, OBA, OBC, OCB, OAC, OCA острые?

6.14. В трёхгранный угол с вершиной S вписана сфера с центром в точке O. Докажите, что плоскость, проходящая через три точки касания, перпендикулярна прямой SO.

6.15. Докажите, что в произвольном трёхгранном угле биссектрисы двух плоских углов и угла, смежного с третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.

6.16. Докажите, что попарные углы между биссектрисами плоских углов трёхгранного угла либо одновременно острые, либо одновременно тупые, либо одновременно прямые.

6.17. а) В трёхгранный угол $SABC$ вписана сфера, касающаяся граней SBC, SCA и SAB в точках A_1, B_1 и C_1. Выразите величину угла ASB_1 через плоские углы данного трёхгранного угла.

б) Вписанная и вневписанная сферы тетраэдра $ABCD$ касаются грани ABC в точках P и P' соответственно. Докажите, что прямые AP и AP' симметричны относительно биссектрисы угла BAC.

6.18. Плоские углы трёхгранного угла не прямые. Через его рёбра проведены плоскости, перпендикулярные противолежащим граням. Докажите, что эти плоскости пересекаются по одной прямой l.

Прямую l из задачи 6.18 называют *ортоосью* трёхгранного угла.

6.19. Плоскость Π, перпендикулярная ортооси трёхгранного угла, пересекает его по треугольнику ABC. Докажите, что ортоось пересекает плоскость Π в ортоцентре треугольника ABC.

6.20. а) Плоские углы трёхгранного угла не прямые. В плоскостях его граней проведены прямые, перпендикулярные противолежащим рёбрам. Докажите, что все три полученные прямые параллельны одной плоскости.

б) Два трёхгранных угла с общей вершиной S расположены так, что рёбра второго угла лежат в плоскостях соответствующих граней первого и перпендикулярны его противоположным рёбрам. Найдите плоские углы первого трёхгранного угла.

§ 5. Многогранные углы

6.21. а) Докажите, что у любого выпуклого четырёхгранного угла существует сечение, являющееся параллелограммом, причём все такие сечения параллельны.

б) Докажите, что у выпуклого четырёхгранного угла с равными плоскими углами существует сечение, являющееся ромбом.

6.22. Докажите, что в многогранном угле любой плоский угол меньше суммы всех остальных плоских углов.

6.23. Один из двух выпуклых многогранных углов с общей вершиной лежит внутри другого. Докажите, что сумма плоских углов внутреннего многогранного угла меньше суммы плоских углов внешнего.

6.24. а) Докажите, что сумма двугранных углов выпуклого n-гранного угла больше $(n-2)\pi$.

б) Докажите, что сумма плоских углов выпуклого n-гранного угла меньше 2π.

6.25. Сумма плоских углов некоторого выпуклого n-гранного угла равна сумме его двугранных углов. Докажите, что $n=3$.

6.26. В выпуклый четырёхгранный угол вписана сфера. Докажите, что суммы его противоположных плоских углов равны.

6.27. Докажите, что выпуклый четырёхгранный угол можно вписать в конус тогда и только тогда, когда суммы его противоположных двугранных углов равны.

Для выпуклого n-гранного угла можно определить *полярный* к нему n-гранный угол точно так же, как и для трёхгранных углов. Аналогично можно определить *полярный конус* для прямого кругового конуса как множество перпендикуляров, опущенных из точки внутри конуса на касательные к нему плоскости.

6.28. Докажите, что если многогранный угол вписан в прямой круговой конус (т. е. рёбра многогранного угла являются образующими конуса), то полярный к нему многогранный угол описан вокруг полярного конуса (т. е. грани многогранного угла касаются конуса).

§ 6. Теоремы Чевы и Менелая

Пусть лучи l, m и n с общим началом лежат в одной плоскости. Выберем в этой плоскости положительное направление вращения. В этом параграфе будем обозначать через $\frac{\sin(l, m)}{\sin(n, m)}$ отношение синусов углов, на которые нужно повернуть в положительном направлении лучи l и n, чтобы они совпали с лучом m. Ясно, что эта величина не зависит от выбора в плоскости положительного направления вращения, так как при изменении этого выбора меняют знак и числитель, и знаменатель.

Пусть полуплоскости α, β и γ имеют общую границу. Выберем одно из двух направлений вращения вокруг этой прямой в качестве положительного. В этом параграфе будем обозначать через $\frac{\sin(\alpha, \beta)}{\sin(\gamma, \beta)}$ отношение синусов углов, на которые нужно повернуть в положительном направлении полуплоскости α и γ, чтобы они совпали с полуплоскостью β. Ясно, что эта величина не зависит от выбора положительного направления вращения.

6.29. Дан трёхгранный угол с вершиной S и рёбрами a, b и c. Лучи α, β и γ с началом в точке S расположены в плоскостях граней, противолежащих рёбрам a, b и c соответственно.

а) Докажите, что лучи α, β и γ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin(a, \gamma)}{\sin(b, \gamma)} \cdot \frac{\sin(b, \alpha)}{\sin(c, \alpha)} \cdot \frac{\sin(c, \beta)}{\sin(a, \beta)} = 1$$

(*первая теорема Менелая*).

б) Докажите, что плоскости, проходящие через пары лучей a и α, b и β, c и γ, пересекаются по одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin(a,\gamma)}{\sin(b,\gamma)}\cdot\frac{\sin(b,\alpha)}{\sin(c,\alpha)}\cdot\frac{\sin(c,\beta)}{\sin(a,\beta)}=-1$$

(*первая теорема Чевы*).

6.30. Дан трёхгранный угол с вершиной S и рёбрами a, b, c. Лучи α, β и γ с началом в точке S расположены в плоскостях граней, противолежащих рёбрам a, b и c соответственно. Будем обозначать через lm плоскость, содержащую лучи l и m.

а) Докажите, что

$$\frac{\sin(ab,a\alpha)}{\sin(ac,a\alpha)}\cdot\frac{\sin(bc,b\beta)}{\sin(ba,b\beta)}\cdot\frac{\sin(ca,c\gamma)}{\sin(cb,c\gamma)}=\frac{\sin(b,\alpha)}{\sin(c,\alpha)}\cdot\frac{\sin(c,\beta)}{\sin(a,\beta)}\cdot\frac{\sin(a,\gamma)}{\sin(b,\gamma)}.$$

б) Докажите, что лучи α, β и γ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin(ab,a\alpha)}{\sin(ac,a\alpha)}\cdot\frac{\sin(bc,b\beta)}{\sin(ba,b\beta)}\cdot\frac{\sin(ca,c\gamma)}{\sin(cb,c\gamma)}=1$$

(*вторая теорема Менелая*).

в) Докажите, что плоскости, проходящие через пары лучей a и α, b и β, c и γ, пересекаются по одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin(ab,a\alpha)}{\sin(ac,a\alpha)}\cdot\frac{\sin(bc,b\beta)}{\sin(ba,b\beta)}\cdot\frac{\sin(ca,c\gamma)}{\sin(cb,c\gamma)}=-1$$

(*вторая теорема Чевы*).

6.31. В трёхгранный угол $SABC$ вписана сфера, касающаяся граней SBC, SCA и SAB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что плоскости SAA_1, SBB_1 и SCC_1 пересекаются по одной прямой.

6.32. Дан трёхгранный угол с вершиной S и рёбрами a, b и c. Лучи α, β и γ расположены в плоскостях граней, противолежащих рёбрам a, b и c, а лучи α', β' и γ' симметричны этим лучам относительно биссектрис соответствующих граней.

а) Докажите, что лучи α, β и γ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда лучи α', β' и γ' лежат в одной плоскости.

б) Докажите, что плоскости, проходящие через пары лучей a и α, b и β, c и γ, пересекаются по одной прямой тогда и только тогда, когда плоскости, проходящие через пары лучей a и α', b и β', c и γ', пересекаются по одной прямой.

6.33. Дан трёхгранный угол с вершиной S и рёбрами a, b и c. Прямые α, β и γ расположены в плоскостях граней, противолежащих рёбрам a, b и c. Пусть α' — прямая, по которой плоскость, симметричная плоскости $a\alpha$ относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре a, пересекает плоскость грани bc; прямые β' и γ' определяются аналогично.

а) Докажите, что прямые α, β и γ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда прямые α', β' и γ' лежат в одной плоскости.

б) Докажите, что плоскости, проходящие через пары прямых a и α, b и β, c и γ, пересекаются по одной прямой тогда и только тогда, когда плоскости, проходящие через пары прямых a и α', b и β', c и γ', пересекаются по одной прямой.

6.34. Дан тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ и некоторая точка P. Для каждого ребра A_iA_j рассмотрим плоскость, симметричную плоскости PA_iA_j относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре A_iA_j. Докажите, что либо все эти шесть плоскостей пересекаются в одной точке, либо все они параллельны одной прямой.

Точку, в которой пересекаются шесть плоскостей из задачи 6.34, называют *изогонально сопряжённой* точке P относительно тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Другой подход к изогональному сопряжению обсуждается в § 11 в гл. 8.

6.35. Дан трёхгранный угол $SABC$, причём $\angle ASB = \angle ASC = 90^\circ$. Плоскости π_b и π_c проходят через рёбра SB и SC, а плоскости π'_b и π'_c симметричны им относительно биссекторных плоскостей двугранных углов при этих рёбрах. Докажите, что проекции на плоскость BSC прямых пересечения плоскостей π_b и π_c, π'_b, и π'_c симметричны относительно биссектрисы угла BSC.

6.36. Пусть точка Монжа тетраэдра $ABCD$ лежит в плоскости грани ABC. Докажите, что тогда через точку D проходят плоскости, в которых лежат:

а) точки пересечения высот граней DAB, DBC и DAC;

б) центры описанных окружностей граней DAB, DBC и DAC.

Решения

6.1. Рёбра SA, SB и SC перпендикулярны граням $S'B'C'$, $S'C'A'$ и $S'A'B'$ соответственно.

6.2. Плоские углы трёхгранного угла $S'A'B'X'$ дополняют до π двугранные углы трёхгранного угла $SABC$. Остаётся заметить, что полярный к трёхгранному углу $S'A'B'X'$ равен трёхгранному углу $SABC$, поэтому плоские углы трёхгранного угла $SABC$ дополняют до π двугранные углы трёхгранного угла $S'A'B'X'$.

6.3. Рассмотрим трёхгранный угол, полярный к данному. Его плоские углы прямые, поэтому его двугранные углы тоже прямые. Следовательно, плоские углы исходного трёхгранного угла тоже прямые.

6.4. Полярные углы к данным трёхгранным углам имеют равные плоские углы, а значит, они равны.

6.5. Рассмотрим трёхгранный угол $SABC$ с вершиной S. Неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$ очевидно, если $\angle ASC \leqslant \angle ASB$. Поэтому будем считать, что $\angle ASC > \angle ASB$. Тогда внутри грани ASC можно так выбрать точку B', что $\angle ASB' = \angle ASB$ и $SB' = SB$, т. е. $\Delta ASB = \Delta ASB'$. Можно считать, что точка C лежит в плоскости ABB'. Так как $AB' + B'C = AC < AB + BC = A'B + BC$, то $B'C < BC$. Следовательно, $\angle B'SC < \angle BSC$. Остаётся заметить, что $\angle B'SC = \angle ASC - \angle ASB$.

6.6. П е р в о е р е ш е н и е. Отложим на рёбрах трёхгранного угла от вершины S равные отрезки SA, SB и SC. Пусть O — проекция точки S на плоскость ABC. Равнобедренные треугольники ASB и AOB имеют общее основание AB, и $AS > AO$. Следовательно, $\angle ASB < \angle AOB$. Записывая аналогичные неравенства для двух других углов и складывая их, получаем $\angle ASB + \angle BSC + \angle CSA < \angle AOB + \angle BOC + \angle COA \leqslant 2\pi$ (последнее неравенство становится строгим, когда точка O лежит вне треугольника ABC).

Для доказательства второй части достаточно применить уже доказанное неравенство к углу, полярному к данному. В самом деле, если α, β и γ — двугранные углы данного трёхгранного угла, то $(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) < 2\pi$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

В т о р о е р е ш е н и е. Пусть точка A' лежит на продолжении ребра SA за вершину S. Согласно задаче 6.5 имеем $\angle A'SB + A'SC > \angle BSC$, т. е. $(\pi - \angle ASB) + (\pi - \angle ASC) > \angle BSC$, а значит, $2\pi > \angle ASB + \angle BSC + \angle CSA$. Доказательство второй части проводится точно так же, как и в первом решении.

6.7. Для трёхгранного угла указанные неравенства всегда выполняются согласно задачам 6.5 и 6.6. Поэтому нужно лишь доказать, что если такие неравенства выполняются, то существует трёхгранный угол с плоскими углами α, β, γ. Расположим в одной плоскости два угла величиной α и β так, чтобы одна сторона у них была общая, и будем поворачивать один из этих углов вокруг общей стороны до тех пор, пока он не повернётся на 180°. Возможны два случая:

1) $\alpha + \beta \leqslant \pi$; в этом случае угол между свободными сторонами данных углов изменяется от $|\alpha - \beta| < \gamma$ до $\alpha + \beta > \gamma$, поэтому он в какой-то момент равен γ;

2) $\alpha + \beta > \pi$; в этом случае угол между свободными сторонами данных углов изменяется от $|\alpha - \beta| < \gamma$ до $2\pi - \alpha - \beta > \gamma$, поэтому он в какой-то момент равен γ.

6.8. Пусть K — точка пересечения грани SCB с прямой AC'. Согласно задаче 6.5 имеем $\angle C'SK + \angle KSB > \angle C'SB$ и $\angle CSA + \angle CSK > \angle ASK = \angle ASC' + \angle C'SK$. Складывая эти неравенства и учитывая, что $\angle CSK + \angle KSB = \angle CSB$, получаем требуемое.

6.9. Возьмём на ребре SA трёхгранного угла $SABC$ произвольную точку M. Пусть M' — проекция точки M на плоскость SBC, P и Q — проекции точки M на прямые SB и SC. По теореме о трёх перпендикулярах $M'P \perp SB$ и $M'Q \perp SC$. Если $SM = a$, то $MQ = a\sin\beta$ и $MM' = MQ\sin C = a\sin\beta\sin c$. Аналогично $MM' = MP\sin B = a\sin\gamma\sin B$. Следовательно, $\sin\beta : \sin B = \sin\gamma : \sin C$. Второе равенство доказывается аналогично.

6.10. а) Первое решение. Возьмём на ребре SA точку M и восставим из неё в плоскостях SAB и SAC перпендикуляры PM и QM к ребру SA (точки P и Q лежат на прямых SB и SC). Выражая по теореме косинусов длину стороны PQ в треугольниках PQM и PQS и приравнивая эти выражения, после сокращения получаем требуемое равенство.

Второе решение. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — единичные векторы, направленные по рёбрам SA, SB и SC. Вектор $\boldsymbol{b}$, лежащий в плоскости SAB, можно представить в виде $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cos\gamma + \boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{a}$ и $|\boldsymbol{u}| = \sin\gamma$. Аналогично $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cos\beta + \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{a}$ и $|\boldsymbol{v}| = \sin\beta$. Ясно также, что угол между векторами $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ равен A. С одной стороны, скалярное произведение векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ равно $\cos\alpha$; с другой стороны, это произведение равно

$$(\boldsymbol{a}\cos\gamma + \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\cos\beta + \boldsymbol{v}) = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

б) Для доказательства достаточно применить первую теорему косинусов к углу, полярному к данному трёхгранному углу.

6.11. Проведём три плоскости, параллельные граням трёхгранного угла, удалённые от них на расстояние 1 и пересекающие рёбра. Вместе с плоскостями граней они образуют параллелепипед, причём все его высоты равны 1, а значит, площади его граней равны. Заметим теперь, что длины рёбер этого параллелепипеда равны $\frac{1}{\sin a}$, $\frac{1}{\sin b}$ и $\frac{1}{\sin c}$. Следовательно, площади его граней равны $\frac{\sin\alpha}{\sin b\sin c}$, $\frac{\sin\beta}{\sin a\sin c}$ и $\frac{\sin\gamma}{\sin a\sin b}$. Приравнивая эти выражения, получаем требуемое.

6.12. а) Согласно первой теореме косинусов для трёхгранного угла

$$\sin\beta\sin\gamma\cos A = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma.$$

По условию $\cos\alpha < 0$ и $\cos\beta\cos\gamma > 0$, поэтому $\cos A < 0$.

б) Для доказательства достаточно воспользоваться второй теоремой косинусов.

6.13. Ответ: да, существует. Выберем точки A, B, C на одном расстоянии от точки O. Тогда все указанные углы будут углами при основаниях равнобедренных треугольников, а угол при основании равнобедренного треугольника обязательно острый.

6.14. Пусть A, B и C — точки касания сферы с гранями. Радиус OA перпендикулярен касательной SA, поэтому $\angle SAO = 90^\circ$. Аналогично $\angle SBO = \angle SCO = 90^\circ$. В прямоугольных треугольниках SAO, SBO и SCO катеты AO, BO и CO равны (они равны радиусу сферы), поэтому равны и сами треугольники. Следовательно, проекции вершин A, B и C на гипотенузу SO совпадают. Но это как раз и означает, что прямая SO перпендикулярна плоскости ABC.

6.15. Первое решение. Отложим на рёбрах трёхгранного угла от вершины S равные отрезки SA, SB и SC. Биссектрисы углов ASB и BSC проходят через середины отрезков AB и BC, а биссектриса угла, смежного с углом CSA, параллельна CA.

Второе решение. Отложим на рёбрах трёхгранного угла от вершины S равные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Биссектрисы углов ASB и BSC параллельны векторам $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, а биссектриса угла, смежного с углом CSA, параллельна вектору $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$. Остаётся заметить, что $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

6.16. Отложим на рёбрах трёхгранного угла от его вершины векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ единичной длины. Векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ задают биссектрисы плоских углов. Остаётся проверить, что все попарные скалярные произведения этих векторов имеют один и тот же знак. Легко убедиться, что скалярное произведение любой пары этих векторов равно

$$1+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}).$$

6.17. а) Пусть α, β и γ — плоские углы трёхгранного угла $SABC$; $x = \angle ASB_1 = \angle ASC_1$, $y = \angle BSA_1 = \angle BSC_1$ и $z = \angle CSA_1 = \angle CSB_1$. Тогда $x + y = \angle ASC_1 + \angle BSC_1 = \angle ASB = \gamma$, $y+z=\alpha$, $z+x=\beta$. Поэтому $x=\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.

б) Пусть точка D' лежит на продолжении ребра AD за точку A. Тогда вневписанная сфера тетраэдра, касающаяся грани ABC, вписана в трёхгранный угол $ABCD'$ с вершиной A. Из решения задачи (а) следует, что $\angle BAP = \dfrac{\angle BAC+\angle BAD-\angle CAD}{2}$ и $\angle CAP' = \dfrac{\angle BAC+\angle CAD'-\angle BAD'}{2}$. А так как $\angle BAD' = 180^\circ - \angle BAD$ и $\angle CAD' = 180^\circ - \angle CAD$, то $\angle BAP = \angle CAP'$; значит, прямые AP и AP' симметричны относительно биссектрисы угла BAC.

6.18. Выберем точки A, B и C на рёбрах трёхгранного угла с вершиной S так, что $SA \perp ABC$ (плоскость, проходящая через точку A одного ребра перпендикулярно ему, пересекает два других ребра, так как плоские углы не прямые). Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Достаточно проверить, что SAA_1, SBB_1 и SCC_1 являются плоскостями, о которых говорится в условии задачи. Так как $BC \perp AS$ и $BC \perp AA_1$, то $BC \perp SAA_1$, а значит, плоскости SBC и SAA_1 перпендикулярны. Так как $BB_1 \perp SA$ и $BB_1 \perp AC$, то $BB_1 \perp SAC$, а значит, плоскости SBB_1 и SAC перпендикулярны. Аналогично доказывается, что плоскости SCC_1 и SBC перпендикулярны.

6.19. Пусть S — вершина данного трёхгранного угла, а H — точка пересечения плоскости Π с ортоосью. Плоскости ASH и ABC перпендикулярны, так как $SH \perp ABC$. Плоскости ASH и SBC перпендикулярны по определению ортооси. Поэтому $ACH \perp BC$, а значит, $AH \perp BC$. Аналогично $AH \perp CA$ и $AH \perp AB$.

6.20. а) Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — векторы, направленные по рёбрам SA, SB и SC трёхгранного угла. Прямая, лежащая в плоскости SBC и перпендикулярная ребру SA, параллельна вектору $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$. Аналогично две другие прямые параллельны векторам $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{c}$ и $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$. Так как сумма этих трёх векторов равна нулю, они параллельны одной плоскости.

б) Направим по рёбрам первого трёхгранного угла векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Пусть $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \beta$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \gamma$. Если ребро второго угла, лежащее в плоскости SAB, параллельно вектору $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$, то $(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$, т. е. $\lambda\beta + \mu\alpha = 0$. Легко проверить, что если хотя бы одно из чисел α и β отлично от нуля, то это ребро параллельно вектору $\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}$ (случай, когда одно из чисел равно нулю, нужно разобрать отдельно). Следовательно, если не более одного из чисел α, β и γ равно нулю, то рёбра второго двугранного угла параллельны векторам $\gamma\boldsymbol{c} - \beta\boldsymbol{b}$, $\alpha\boldsymbol{a} - \gamma\boldsymbol{c}$ и $\beta\boldsymbol{b} - \alpha\boldsymbol{a}$, а так как сумма этих векторов равна нулю, то рёбра должны лежать в одной плоскости. Если же, например, $\alpha \neq 0$ и $\beta = \gamma = 0$, то два ребра должны быть параллельны вектору $\boldsymbol{a}$. Остаётся единственная возможность: все числа α, β и γ равны нулю, т. е. плоские углы первого трёхгранного угла прямые.

6.21. а) Пусть A, B, C и D — точки на рёбрах выпуклого четырёхгранного угла с вершиной S. Прямые AB и CD параллельны тогда и только тогда, когда они параллельны прямой l_1, по которой пересекаются плоскости SAB и SCD. Прямые BC и AD параллельны тогда и только тогда, когда они параллельны прямой l_2, по которой пересекаются плоскости SCB и SAD. Следовательно, сечение является параллелограммом тогда и только тогда, когда оно параллельно прямым l_1 и l_2.

Замечание. Для невыпуклого четырёхгранного угла сечение плоскостью, параллельной прямым l_1 и l_2, не будет ограниченной фигурой.

б) Точки A и C на рёбрах четырёхгранного угла можно выбрать так, что $SA = SC$. Пусть P — точка пересечения отрезка AC с плоскостью SBD. Точки B и D можно выбрать так, что $SB = SD$ и отрезок BD проходит через точку P. Так как плоские углы данного четырёхгранного угла равны, то равны треугольники SAB, SAD, SCB и SCD. Поэтому четырёхугольник $ABCD$ — ромб.

6.22. Рассмотрим многогранный угол $OA_1 \ldots A_n$ с вершиной O. Как следует из результата задачи 6.5, $\angle A_1OA_2 < \angle A_2OA_3 + \angle A_1OA_3$, $\angle A_1OA_3 < \angle A_3OA_4 + \angle A_1OA_4$, ..., $\angle A_1OA_{n-1} < \angle A_{n-1}OA_n + \angle A_nOA_1$. Следовательно,

$$\angle A_1OA_2 < \angle A_2OA_3 + \angle A_3OA_4 + \ldots + \angle A_{n-1}OA_n + \angle A_nOA_1.$$

6.23. Пусть многогранный угол $OA_1 \ldots A_n$ лежит внутри многогранного угла $OB_1 \ldots B_m$. Можно считать, что $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ — точки пересечения их рёбер со сферой радиуса 1. Тогда величины плоских углов данных многогранных углов равны длинам соответствующих дуг этой сферы. Итак, вместо многогранных углов будем рассматривать «сферические многоугольники» $A_1 \ldots A_n$ и $B_1 \ldots B_m$. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — точки пересечения «лучей» $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ со сторонами сферического многоугольника $B_1 \ldots B_m$ (рис. 6.1).

Согласно задаче 6.22 имеем

$$\smile A_iA_{i+1} + \smile A_{i+1}P_i = \smile A_iP_i < \smile A_iP_{i-1} = \\ = l(P_{i-1}, P_i),$$

где $l(P_{i-1}, P_i)$ — длина части «периметра» многоугольника $B_1 \ldots B_m$, заключённой внутри «угла» $P_{i-1}A_iP_i$. Складывая эти неравенства, получаем требуемое.

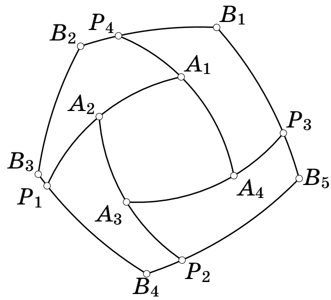


Рис. 6.1

6.24. а) Разрежем n-гранный угол $SA_1 \ldots \ldots A_n$ с вершиной S на $n-2$ трёхгранных углов плоскостями SA_1A_3, SA_1A_4, ..., SA_1A_{n-1}. Сумма двугранных углов n-гранного угла равна сумме двугранных углов этих трёхгранных углов, а сумма двугранных углов любого трёхгранного угла больше π (задача 6.6).

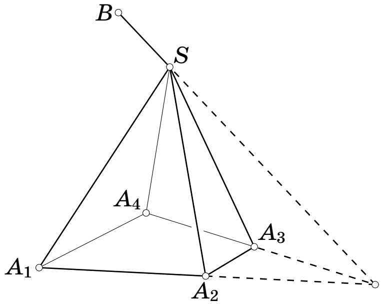


Рис. 6.2

б) Докажем это утверждение индукцией по n. Для $n=3$ оно верно (см. задачу 6.6). Предположим, что оно верно для любого выпуклого $(n-1)$-гранного угла, и докажем, что тогда оно верно для выпуклого n-гранного угла $SA_1 \ldots A_n$ с вершиной S. Плоскости SA_1A_2 и $SA_{n-1}A_n$ имеют общую точку S, поэтому они пересекаются по некоторой прямой l, причём эта прямая не лежит в плоскости SA_1A_n. Возьмём на прямой l точку B так, чтобы она и многогранный угол $SA_1 \ldots A_n$ лежали по разные стороны от плоскости SA_1A_n (рис. 6.2). Рассмотрим $(n-1)$-гранный угол $SBA_2A_3 \ldots A_{n-1}$. По предположению индукции сумма его плоских углов меньше 2π, а так как $\angle BSA_1 + \angle BSA_n > \angle A_1SA_n$ (задача 6.5), то сумма плоских углов n-гранного угла $SA_1A_2 \ldots A_n$ меньше суммы плоских углов $(n-1)$-гранного угла $SBA_2A_3 \ldots A_{n-1}$.

6.25. Сумма Σ_1 плоских углов произвольного выпуклого многогранного угла меньше 2π (см. задачу 6.24 (б)), а сумма Σ_2 двугранных углов выпуклого n-гранного угла больше $(n-2)\pi$ (см. задачу 6.24 (а)). Поэтому $(n-2)\pi < \Sigma_2 = = \Sigma_1 < 2\pi$, т. е. $n < 4$.

6.26. Пусть сфера касается граней четырёхгранного угла $SABCD$ в точках K, L, M и N (K принадлежит грани SAB, L — грани SBC и т. д.). Тогда $\angle ASK = \angle ASN$, $\angle BSK = \angle BSL$, $\angle CSL = \angle CSM$, $\angle DSM = \angle DSN$. Поэтому

$$\angle ASD + \angle BSC = \angle ASN + \angle DSN + \angle BSL + \angle CSL = \\ = \angle ASK + \angle DSM + \angle BSK + \angle CSM = \angle ASB + \angle CSD.$$

6.27. Пусть рёбра четырёхгранного угла $SABCD$ с вершиной S являются образующими конуса с осью SO. В трёхгранном угле, образованном лучами SO, SA и SB, двугранные углы при рёбрах SA и SB равны. Рассматривая три других таких угла, получаем равенство сумм противоположных двугранных углов четырёхгранного угла $SABCD$.

Предположим теперь, что суммы противоположных двугранных углов равны. Рассмотрим конус с образующими SB, SA и SC. Допустим, что SD не является его образующей. Пусть SD_1 — прямая пересечения конуса с плоскостью ASD. В четырёхгранных углах $SABCD$ и $SABCD_1$ суммы противоположных двугранных углов равны. Из этого следует, что двугранные углы трёхгранного угла $SCDD_1$ удовлетворяют соотношению $\angle D + \angle D_1 - 180^\circ = \angle C$. Рассмотрим трёхгранный угол, полярный к $SCDD_1$ (см. задачу 6.1). В этом угле сумма двух плоских углов равна третьему, что невозможно (см. задачу 6.5)

6.28. Проведём доказательство для трёхгранного угла $SABC$, вписанного в конус с вершиной S (для многогранного угла доказательство аналогично). Пусть O — точка на оси конуса, Π_C — плоскость, касающаяся конуса по образующей SC. Опустим из точки O перпендикуляр OC'' на прямую SC. Образующей SC полярна образующая, параллельная OC'', причём плоскость, касающаяся полярного конуса по этой образующей, перпендикулярна прямой SC, т. е. эта плоскость совпадает с плоскостью грани $S'A'B'$. Аналогично доказывается, что и остальные грани полярного трёхгранного угла $S'A'B'C'$ касаются полярного конуса.

6.29. а) Возьмём на рёбрах a, b и c трёхгранного угла произвольные точки A, B и C. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки, в которых лучи α, β и γ (или их продолжения) пересекают прямые BC, CA и AB. Применяя теорему синусов к треугольникам SA_1B и SA_1C, получаем $\dfrac{A_1B}{\sin BSA_1} = \dfrac{BS}{\sin BA_1S}$ и $\dfrac{A_1C}{\sin CSA_1} = \dfrac{CS}{\sin CA_1S}$. Учитывая, что $\sin BA_1S = \sin CA_1S$, получаем $\dfrac{\sin BSA_1}{\sin CSA_1} = \dfrac{A_1B}{A_1C} \cdot \dfrac{CS}{BS}$. Как легко убедиться, это означает, что $\dfrac{\sin(b,\alpha)}{\sin(c,\alpha)} = \dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \dfrac{AS}{CS}$ (нужно лишь проверить совпадение знаков этих величин). Аналогично $\dfrac{\sin(a,\gamma)}{\sin(b,\gamma)} = \dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} \cdot \dfrac{BS}{AS}$ и $\dfrac{\sin(c,\beta)}{\sin(a,\beta)} = \dfrac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \dfrac{AS}{CS}$. Остаётся применить теорему Менелая к треугольнику ABC и заметить, что лучи α, β и γ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

В приведённом выше решении есть небольшая неточность: не учитывается, что прямые, на которых лежат лучи α, β и γ, могут быть параллельны прямым BC, CA и AB. Чтобы этого не случилось, точки A, B и C нужно выбирать не произвольно. Пусть A — произвольная точка на ребре a, а P и Q — такие точки на рёбрах b и c, что $AP \parallel \gamma$ и $AQ \parallel \beta$. Возьмём на ребре точку B, отличную от P, и пусть R — такая точка на ребре c, что $BR \parallel \alpha$. Остаётся взять на ребре c точку C, отличную от Q и R. Теперь уже всегда существуют точки A_1, B_1 и C_1, в которых лучи α, β и γ (или их продолжения) пересекают прямые BC, CA и AB.

б) Решение почти дословно повторяет решение предыдущей задачи; нужно лишь к треугольнику ABC применить не теорему Менелая, а теорему Чевы.

6.30. а) Как видно из решения задачи 6.29 (а), на рёбрах a, b и c можно так выбрать точки A, B и C, что лучи α, β и γ не параллельны прямым BC, CA и AB и пересекают их в точках A_1, B_1 и C_1. Обозначим для краткости двугранные углы между плоскостями ab и $a\alpha$, ac и $a\alpha$ через U, V, а углы между лучами b и α, c и α — через u, v; будем также обозначать площадь треугольника XYZ через (XYZ). Вычислим объём тетраэдра $SABA_1$ двумя способами. С одной стороны,

$$V_{SABA_1} = (SA_1B)\cdot\frac{h_a}{3} = SA_1\cdot SB\cdot\frac{h_a\sin u}{6},$$

где h_a — высота, опущенная из вершины A на грань SBC. С другой стороны, согласно задаче 3.3 имеем

$$V_{SABA_1} = \frac{2}{3}\frac{(SAB)\cdot(SAA_1)\sin U}{SA}.$$

Поэтому $SA_1\cdot SB\cdot h_a\dfrac{\sin u}{6} = 2(SAB)\cdot(SAA_1)\dfrac{\sin U}{3SA}$. Аналогично

$$SA_1\cdot SC\cdot h_a\frac{\sin v}{6} = 2(SAC)\cdot(SAA_1)\frac{\sin V}{3SA}.$$

Деля одно из этих равенств на другое, получаем

$$\frac{SB}{SC}\cdot\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{(SAB)}{(SAC)}\cdot\frac{\sin U}{\sin V}.$$

Это равенство означает, что

$$\frac{SB}{SC}\cdot\frac{\sin(b,\alpha)}{\sin(c,\alpha)} = \frac{(SAB)}{(SAC)}\cdot\frac{\sin(ab,a\alpha)}{\sin(ac,a\alpha)}$$

(нужно лишь проверить совпадение знаков этих выражений). Проводя аналогичные рассуждения для точек B_1 и C_1 и перемножая полученные равенства, после сокращения приходим к требуемому равенству.

б) Для решения этой задачи нужно воспользоваться результатами задач 6.29 (а) и 6.30 (а).

в) Для решения этой задачи нужно воспользоваться результатами задач 6.29 (б) и 6.30 (а).

6.31. Пусть a, b и c — рёбра SA, SB и SC; α, β и γ — лучи SA_1, SB_1 и SC_1. Так как $\angle ASB_1 = \angle ASC_1$, то $|\sin(a,\beta)| = \sin(a,\gamma)|$. Аналогично $|\sin(b,\alpha)| = \sin(b,\gamma)|$ и $|\sin(c,\alpha)| = \sin(c,\beta)|$. Поэтому

$$\left|\frac{\sin(a,\gamma)}{\sin(b,\gamma)}\cdot\frac{\sin(b,\alpha)}{\sin(c,\alpha)}\cdot\frac{\sin(c,\beta)}{\sin(a,\beta)}\right| = 1.$$

Ясно также, что каждый из трёх этих сомножителей отрицателен, а значит, их произведение равно -1. Остаётся воспользоваться первой теоремой Чевы (задача 6.29 (б)).

6.32. Легко проверить, что $\sin(a,\gamma) = -\sin(b,\gamma')$ и $\sin(b,\gamma) = -\sin(a,\gamma')$, $\sin(b,\alpha) = -\sin(c,\alpha')$ и $\sin(c,\alpha) = -\sin(b,\alpha')$, $\sin(c,\beta) = -\sin(a,\beta')$ и $\sin(a,\beta) =$

$=-\sin(c, \beta')$. Поэтому

$$\frac{\sin(a, \gamma')}{\sin(b, \gamma')} \cdot \frac{\sin(b, \alpha')}{\sin(c, \alpha')} \cdot \frac{\sin(c, \beta')}{\sin(a, \beta')} = \left(\frac{\sin(a, \gamma)}{\sin(b, \gamma)} \cdot \frac{\sin(b, \alpha)}{\sin(c, \alpha)} \cdot \frac{\sin(c, \beta)}{\sin(a, \beta)}\right)^{-1}.$$

Для решения задач (а) и (б) достаточно воспользоваться этим равенством и первыми теоремами Менелая и Чевы (задачи 6.29 (а) и 6.29 (б)).

6.33. Рассмотрим сечение плоскостью, проходящей через ребро a перпендикулярно ему, и будем обозначать точки пересечения данных прямых и рёбер с этой плоскостью теми же буквами, что и их самих. Возможны два случая.

1. Лучи $a\alpha$ и $a\alpha'$ симметричны относительно биссектрисы угла bac (рис. 6.3, *а*).

2. Лучи $a\alpha$ и $a\alpha'$ симметричны относительно прямой, перпендикулярной биссектрисе угла bac (рис. 6.3, *б*). В первом случае угол поворота от луча $a\alpha$ к лучу ab равен углу поворота от луча ac к лучу $a\alpha'$ и угол поворота от луча $a\alpha$ к лучу ac равен углу поворота от луча ab к лучу $a\alpha$; во втором случае эти углы не равны, а отличаются на 180°. Переходя к углам между полуплоскостями, в первом случае получаем $\sin(ab, a\alpha) = -\sin(ac, a\alpha')$ и $\sin(ac, a\alpha) = -\sin(ab, a\alpha')$, а во втором случае $\sin(ab, a\alpha) = \sin(ac, a\alpha')$ и $\sin(ac, a\alpha) = \sin(ab, a\alpha')$. В обоих случаях $\dfrac{\sin(ab, a\alpha)}{\sin(ac, a\alpha)} = \dfrac{\sin(ac, a\alpha')}{\sin(ab, a\alpha')}$. Проводя аналогичные рассуждения для рёбер a, b и c и перемножая все такие равенства, получаем

$$\frac{\sin(ab, a\alpha)}{\sin(ac, a\alpha)} \cdot \frac{\sin(bc, b\beta)}{\sin(ba, b\beta)} \cdot \frac{\sin(ca, c\gamma)}{\sin(cb, c\gamma)} = \left(\frac{\sin(ab, a\alpha')}{\sin(ac, a\alpha')} \cdot \frac{\sin(bc, b\beta')}{\sin(ba, b\beta')} \cdot \frac{\sin(ca, c\gamma')}{\sin(cb, c\gamma')}\right)^{-1}.$$

Для решения задач (а) и (б) достаточно воспользоваться этим равенством и вторыми теоремами Менелая и Чевы (задачи 6.30 (б) и 6.30 (в)).

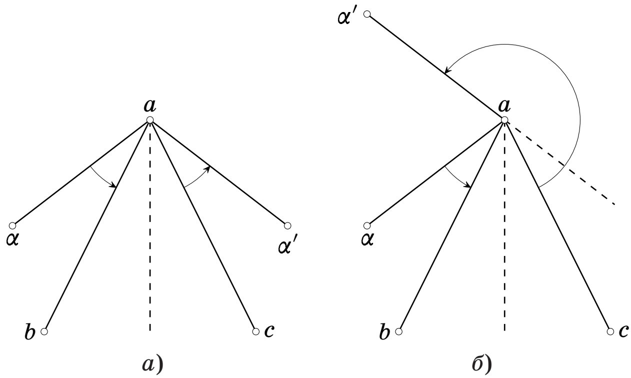


Рис. 6.3

6.34. Обозначим через π_{ij} плоскость, симметричную плоскости PA_iA_j относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре A_iA_j. Как следует из задачи 6.33 (б), плоскость π_{ii} проходит через прямую, по которой пересекаются плоскости π_{ij} и π_{ik}. Рассмотрим три плоскости π_{12}, π_{23} и π_{31}. Возможны два случая.

1. Эти плоскости имеют некоторую общую точку P. Тогда плоскости π_{14}, π_{24} и π_{34} проходят через прямые A_1P, A_2P и A_3P соответственно, т. е. все 6 плоскостей π_{ij} проходят через точку P.

2. Плоскости π_{12} и π_{13}, π_{21} и π_{23}, π_{31} и π_{33} пересекаются по прямым l_1, l_2, l_3, причём эти прямые параллельны. Тогда плоскости π_{14}, π_{24} и π_{34} проходят через прямые l_1, l_2 и l_3 соответственно, т. е. все шесть плоскостей π_{ij} параллельны одной прямой.

6.35. Проекция на плоскость BSC любой прямой l, проходящей через точку S, совпадает с прямой, по которой плоскость, проведённая через ребро SA и прямую l, пересекает плоскость BSC. Поэтому достаточно доказать, что плоскости, проведённые через ребро SA и прямые пересечения плоскостей π_b и π_c, π'_b, и π'_c, симметричны относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре SA. Это следует из результата задачи 6.30 (в).

6.36. а) При решении этой задачи будем использовать то, что проекция D_1 точки D на плоскость ABC лежит на описанной окружности треугольника ABC (задача 8.65). Проведём в треугольниках DAB, DBC и BAC высоты DC_1, DA_1 и DB_1. Требуется доказать, что лучи DA_1, DB_1 и DC_1 лежат в одной плоскости, т. е. точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Так как прямая DD_1 перпендикулярна плоскости ABC, то $DD_1 \perp A_1C$. Кроме того, $DA_1 \perp A_1C$. Поэтому прямая A_1C перпендикулярна плоскости DD_1A_1, в частности, $D_1A_1 \perp A_1C$. Следовательно, A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных на прямые BC, CA и AB из точки D_1, лежащей на описанной окружности треугольника ABC (для точек B_1 и C_1 доказательство проводится точно так же, как и для точки A_1). Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой — прямой Симсона (см. «Задачи по планиметрии», задача 5.105).

б) Если AA_1 — высота треугольника ABC, а O — центр его описанной окружности, то лучи AA_1 и AO симметричны относительно биссектрисы угла BAC. В самом деле, легко проверить, что $\angle BAO = \angle CAA_1 = |90^\circ - \angle C|$ (нужно рассмотреть два случая: угол C — тупой и угол C — острый). Поскольку, как было доказано в задаче (а), прямые, соединяющие вершину D с точками пересечения высот граней DAB, DBC и DAC, лежат в одной плоскости, в одной плоскости лежат и прямые, соединяющие вершину D с центрами описанных окружностей граней DAB, DBC и DAC (см. задачу 6.32 (а)).

ГЛАВА 7

СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Основные сведения

Большой окружностью на сфере называют пересечение сферы с плоскостью, проходящей через её центр. На сфере большие окружности играют роль прямых: сферическим отрезком AB мы считаем кратчайшую из дуг большой окружности, проходящей через точки A и B (если эти точки не диаметрально противоположные).

Сферический треугольник — это фигура, высекаемая на сфере трёхгранным углом с вершиной в центре сферы.

Сферический многоугольник — это часть сферы, ограниченная дугами больших окружностей, каждая из которых меньше полуокружности. Дуги, ограничивающие сферический многоугольник, называют его *сторонами*.

Сферическим расстоянием между точками A и B данной сферы называют длину кратчайшей дуги AB.

Сферической окружностью сферического радиуса $\bar{r}$ называют множество точек сферы, удалённых на сферическое расстояние $\bar{r}$ от данной точки O сферы. Точку O называют при этом *сферическим центром* данной сферической окружности

Сферическим кругом радиуса $\bar{r}$ называют множество точек сферы, удалённых на сферическое расстояние не более $\bar{r}$ от данной точки O сферы.

§ 1. Окружности

7.1. Пусть $\bar{r}$ — сферический радиус окружности на сфере радиуса R, а r — обычный радиус этой окружности. Найдите соотношение между $\bar{r}$ и r.

7.2. На сфере даны две пересекающиеся окружности S_1 и S_2. Рассмотрим конус (или цилиндр), касающийся данной сферы по окружности S_1. Докажите, что окружности S_1 и S_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда плоскость окружности S_2 проходит через вершину этого конуса (или параллельна оси цилиндра).

7.3. На сфере радиуса 1 даны равные окружности $S_0, S_1, \ldots, S_n$ радиуса r_n. При этом окружность S_0 касается всех остальных окружностей, и, кроме того, попарно касаются окружности S_1 и S_2, S_2 и $S_3, \ldots, S_n$ и S_1. Выясните, при каких n это возможно, и для каждого такого n найдите соответствующий радиус r_n.

7.4. На сфере расположены три дуги больших кругов в 300° каждая. Докажите, что хотя бы две из них имеют общую точку.

7.5. На сфере радиуса 1 расположено несколько дуг больших окружностей. Сумма длин всех этих дуг меньше π. Докажите, что найдётся плоскость, проходящая через центр сферы, которая не пересекается ни с одной из дуг.

7.6. На сфере радиуса 1 расположено несколько дуг больших окружностей. Любая плоскость, проходящая через центр сферы, пересекает не менее n из этих дуг. Докажите, что сумма длин всех этих дуг не меньше $n\pi$.

7.7. На сфере радиуса 1 дано m точек $A_1, \ldots, A_m$, причём выпуклая оболочка этих точек содержит центр сферы. Докажите, что сумма попарных расстояний между этими точками не меньше $2(m-1)$.

§ 2. Сферические треугольники

Радиус сферы R в этом параграфе предполагается равным 1.

Трёхгранный угол с вершиной в центре сферы высекает на ней *сферический треугольник*. Мы будем использовать такие обозначения: a, b, c — длины сторон сферического треугольника (они равны плоским углам трёхгранного угла), α, β, γ — углы сферического треугольника (они равны плоским углам трёхгранного угла).

При таких обозначениях теорема синусов и теоремы косинусов для трёхгранных углов записываются следующим образом:

$$\sin a : \sin\alpha = \sin b : \sin\beta = \sin c : \sin\gamma \qquad \text{(теорема синусов);}$$

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha \qquad \text{(1-я теорема косинусов);}$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a \qquad \text{(2-я теорема косинусов).}$$

Полярный сферический треугольник — это сферический треугольник, который высекает на сфере полярный трёхгранный угол (с вершиной в центре сферы).

7.8. Докажите, что $a+b+c<2\pi$.

7.9. Докажите, что для любого сферического треугольника существуют вписанная и описанная окружности.

7.10. Докажите, что а) медианы, б) высоты сферического треугольника пересекаются в одной точке.

7.11. а) В сферическом треугольнике ABC с прямым углом C увеличили оба катета. Могла ли при этом не измениться длина гипотенузы?

б) В сферических треугольниках ABC и $A'B'C'$ с прямыми углами C и C' равны гипотенузы и равны катеты AC и $A'C'$. Верно ли, что катеты BC и $B'C'$ тоже равны?

7.12. Докажите, что

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}},$$

где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

7.13. Докажите, что

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2},\quad \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

7.14. Пусть $S=\alpha+\beta+\gamma-\pi$. Докажите, что

а) $2\sin\dfrac{S}{2}=\dfrac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$;

б) $\operatorname{tg}^2\dfrac{S}{4}=\operatorname{tg}\dfrac{p}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-b}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-c}{2}$.

7.15. Докажите, что в сферическом треугольнике с прямым углом γ выполняются соотношения $\operatorname{tg}a=\operatorname{tg}\alpha\sin b$ и $\operatorname{tg}a=\operatorname{tg}c\cos\beta$.

7.16. Пусть $\bar r$ — сферический радиус вписанной окружности сферического треугольника. Докажите, что

$$\operatorname{tg}\bar r=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}.$$

7.17. Пусть $\bar R$ — сферический радиус описанной окружности сферического треугольника. Докажите, что

$$\operatorname{ctg}\bar R=\sqrt{\frac{\sin(\alpha-s)\sin(\beta-s)\sin(\gamma-s)}{\sin s}},$$

где $s=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{2}$.

7.18. Докажите, что сферическая длина медианы m_a, проведённой из вершины A сферического треугольника, выражается по формуле

$$\cos m_a = \frac{\cos b + \cos c}{2\cos\frac{a}{2}}.$$

7.19. Все медианы сферического треугольника равны. Обязательно ли равны его стороны?

> *Средняя линия* A_1B_1 сферического треугольника ABC — это кратчайшая из дуг большой окружности, проходящей через точки A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC.

7.20. Докажите, что серединный перпендикуляр к стороне AB сферического треугольника перпендикулярен его средней линии A_1B_1.

7.21. Докажите, что длина средней линии B_1C_1 сферического треугольника больше половины длины стороны BC.

§ 3. Теорема Птолемея

Радиус сферы R в этом параграфе, как и для сферических треугольников, предполагается равным 1.

7.22. Пусть a, b, c и d — длины последовательных сторон вписанного сферического четырёхугольника, e и f — длины его диагоналей. Докажите, что

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2} = \sin\frac{e}{2}\sin\frac{f}{2}.$$

> Задача 7.22 является сферическим аналогом теоремы Птолемея, поэтому её можно назвать *теоремой Птолемея* для сферического четырёхугольника.

7.23. Пусть a, b, c и d — последовательные стороны описанного сферического четырёхугольника. Угол между парой сторон можно определить как величину двугранного угла, образованного полуплоскостями, содержащими эти стороны. Докажите, что для таких углов выполняется соотношение

$$\cos\frac{\angle(a, b)}{2}\cos\frac{\angle(c, d)}{2} + \cos\frac{\angle(b, c)}{2}\cos\frac{\angle(a, d)}{2} = \cos\frac{\angle(a, c)}{2}\cos\frac{\angle(b, d)}{2}.$$

§ 4. Площадь сферического многоугольника

7.24. Найдите площадь криволинейного треугольника, образованного при пересечении сферы радиуса R с трёхгранным углом, двугранные углы которого равны α, β и γ, а вершина совпадает с центром сферы.

7.25. Пусть A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC сферического треугольника ABC. Докажите, что площадь сферического треугольника A_1B_1C меньше половины площади сферического треугольника ABC.

7.26. Выпуклый n-гранный угол высекает на сфере радиуса R с центром в вершине угла сферический n-угольник. Докажите, что его площадь равна $R^2(\varsigma - (n-2)\pi)$, где ς — сумма двугранных углов.

7.27. Докажите, что на сфере радиуса 1 площадь сферического круга радиуса $\bar{r}$ равна $4\pi \sin^2 \frac{r}{2}$.

§ 5. Геометрические места точек

7.28. На сфере фиксированы две точки A и B. Найдите геометрическое место третьих вершин C сферических треугольников ABC, в которых величина $\angle A + \angle B - \angle C$ постоянна.

7.29. На сфере фиксированы две точки A и B. Найдите геометрическое место третьих вершин C сферических треугольников ABC данной площади (Лекселль).

§ 6. Телесный угол

Рассмотрим сферу единичного радиуса с центром в вершине многогранного угла (или на ребре двугранного угла). Площадь части её поверхности, заключённой внутри этого угла, называют величиной *телесного угла* этого многогранного (двугранного) угла.

7.30. а) Докажите, что телесный угол двугранного угла равен 2α, где α — величина двугранного угла в радианах.

б) Докажите, что телесный угол многогранного угла равен $\varsigma - (n-2)\pi$, где ς — сумма его двугранных углов.

7.31. Вычислите величину телесного угла конуса с углом 2α при вершине.

7.32. Докажите, что разность между суммой телесных углов двугранных углов тетраэдра и суммой телесных углов его трёхгранных углов равна 4π.

7.33. Докажите, что разность между суммой телесных углов двугранных углов при рёбрах многогранника и суммой телесных углов многогранных углов при его вершинах равна $2\pi(\Gamma - 2)$, где Γ — число граней многогранника.

См. также задачи 8.29, 15.26, 15.28.

§ 7. Выпуклые многоугольники

Многоугольник на сфере называют *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой из больших окружностей, на которых лежат его стороны.

Выпуклость сферического многоугольника M эквивалентна выпуклости многогранного угла M_1, который образован всеми лучами, выходящими из центра сферы и идущими в точки многоугольника M.

Эквивалентное определение выпуклого сферического многоугольника таково: вместе с любыми двумя точками A и B он целиком содержит кратчайшую дугу AB большой окружности, соединяющей эти точки. (Напомним, что по определению сферический многоугольник не может содержать диаметрально противоположных точек.)

7.34. Пусть $A_1 \ldots A_n$ и $A'_1 \ldots A'_n$ — выпуклые сферические многоугольники, у которых длины всех соответственных сторон, кроме A_1A_n и $A'_1A'_n$, равны и $\angle A_2 \leqslant \angle A'_2, \ldots, \angle A_{n-1} \leqslant \angle A'_{n-1}$. Докажите, что $A_1A_n \leqslant$ $\leqslant A'_1A'_n$.

7.35. Пусть $A_1 \ldots A_n$ и $A'_1 \ldots A'_n$ — выпуклые сферические многоугольники, у которых длины всех соответственных сторон равны, но сами многоугольники не равны. Пометим угол A_i знаком плюс, если $\angle A_i > \angle A'_i$, и знаком минус, если $\angle A_i < \angle A'_i$. Докажите, что при обходе многоугольника $A_1 \ldots A_n$ количество строгих перемен знака не меньше 4.

§ 8. Радикальная ось

Радикальной осью двух окружностей C_1 и C_2 на сфере S называют большую окружность, плоскость которой проходит через прямую пересечения плоскостей окружностей C_1 и C_2 (если эти плоскости параллельны, то плоскость большой окружности должна быть им параллельна). В частности, если окружности C_1 и C_2 пересекаются, то их радикальная ось — большая окружность, проходящая через точки пересечения, а если они касаются, то их радикальная ось — большая окружность, которая касается обеих окружностей в их точке касания.

З а м е ч а н и е. Радикальная ось определяется только для окружностей, которые не являются большими окружностями. На сфере большие окружности играют роль прямых на плоскости, а на плоскости радикальная ось тоже определяется только для окружностей.

7.36. Докажите, что радикальная ось окружностей C_1 и C_2 на сфере S ортогональна большой окружности, проходящей через сферические центры окружностей C_1 и C_2.

7.37. На сфере S расположены окружности C_1, C_2 и C_3. Докажите, что радикальные оси окружностей C_1 и C_2, C_2 и C_3, C_3 и C_1 пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы или совпадают.

Две диаметрально противоположные точки из задачи 7.37 называют *радикальными центрами* окружностей C_1, C_2 и C_3.

7.38. а) На сфере переменная окружность C пересекает фиксированную окружность C_1 в точках A_1 и B_1 и фиксированную окружность C_2 в точках A_2 и B_2. Докажите, что точки пересечения больших окружностей A_1B_1 и A_2B_2 лежат на фиксированной большой окружности.

б) На сфере переменная окружность C касается фиксированной окружности C_1 в точке A_1 и фиксированной окружности C_2 в точке A_2. Докажите, что точки пересечения большой окружности, касающейся окружности C_1 в точке A_1, и большой окружности, касающейся окружности C_2 в точке A_2, лежат на фиксированной большой окружности.

7.39. Докажите, что если из некоторой точки X сферы можно провести равные сферические касательные к окружностям C_1 и C_2, то точка X лежит на радикальной оси окружностей C_1 и C_2.

7.40. Докажите, что если окружность C со сферическим центром X ортогональна окружностям C_1 и C_2, то точка X лежит на радикальной оси окружностей C_1 и C_2.

Решения

7.1. Пусть отрезок, соединяющий сферический центр сферической окружности с произвольной её точкой, виден из центра сферы под углом α. Тогда $\bar{r} = R\alpha$ и $r = R\sin\alpha$. Поэтому $r = R\sin\dfrac{\bar{r}}{R}$.

7.2. Пусть A — точка пересечения данных окружностей, O — вершина рассматриваемого конуса (или OA — образующая цилиндра). Прямая OA и касательные к окружностям S_1 и S_2 в точке A лежат в одной плоскости — касательной плоскости к сфере в точке A. Поэтому, так как прямая OA перпендикулярна касательной к окружности S_1 в точке A, окружности S_1 и S_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда OA — касательная к окружности S_2.

7.3. Ответ: $n = 3, 4, 5$; $r_n = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}}$.

Пусть A_0, $A_1, \ldots, A_n$ — сферические центры окружностей S_0, $S_1, \ldots, S_n$. Каждый треугольник $A_0A_iA_{i+1}$ равносторонний, поэтому $\angle A_iA_0A_{i+1} = 60^\circ$. Все плоские углы многогранного угла $A_0A_1\dots A_n$ равны 60°. Сумма его плоских углов меньше 360°, поэтому $n\cdot 60^\circ < 360^\circ$, т.е. $n<6$.

Ясно, что точки $A_1, \dots, A_n$ лежат на сферической окружности с центром A_0. Расстояние между сферическими центрами двух равных касающихся окружностей равно расстоянию между диаметрально противоположными точками окружности, равной этим окружностям. Поэтому $A_0A_1\dots A_n$ — правильная пирамида с боковым ребром $2r_n$. Пусть h_n — её высота. Тогда радиус описанной окружности основания равен $\sqrt{4r_n^2-h_n^2}$, поэтому

$$\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{4r_n^2-h_n^2}=r_n. \qquad (1)$$

Рассматривая треугольник OA_0A_1, где O — центр данной сферы, получаем $1:r_n=2r_n:h_n$, а значит, $h_n=2r_n^2$. Подставляя это выражение в равенство (1), находим $r_n=\sqrt{1-\dfrac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}}$.

7.4. Предположим, что данные дуги a, b и c не пересекаются. Пусть C_a и C_b — точки пересечения больших кругов, содержащих дуги a и b. Так как дуга a больше 180°, то она содержит одну из этих точек, например C_a. Тогда дуга b содержит точку C_b. Рассмотрим также точки A_b и A_c, B_a и B_c пересечения других пар больших кругов (A_b принадлежит дуге b, A_c — дуге c, B_a — дуге a, B_c — дуге c). Точки B_c и C_b лежат в плоскости дуги a, но самой дуге a они не принадлежат. Поэтому $\angle B_cOC_b<60^\circ$ (O — центр сферы). Аналогично $\angle A_cOC_a<60^\circ$ и $\angle A_bOB_a<60^\circ$. Следовательно, $\angle A_cOB_c=\angle A_bOB_a<60^\circ$ и $\angle A_cOC_b=180^\circ-\angle A_cOC_a>120^\circ$, поэтому $\angle A_cOB_c+\angle B_cOC_b<\angle A_cOC_b$. Получено противоречие.

7.5. Пусть O — центр сферы. Каждой плоскости, проходящей через O, можно сопоставить пару точек сферы — точки пересечения со сферой перпендикуляра к этой плоскости, проходящего через точку O. Легко проверить, что при этом сопоставлении плоскостям, проходящим через точку A, соответствуют точки большого круга, перпендикулярного прямой OA. Поэтому плоскостям, пересекающим дугу AB, соответствуют точки части сферы, заключённой между двумя плоскостями, проходящими через точку O перпендикулярно прямым OA и OB соответственно (рис. 7.1). Площадь этой фигуры равна $\dfrac{\alpha}{\pi}S$, где α — угловая величина дуги AB, а S — площадь сферы. Таким образом, если сумма угловых величин дуг меньше π, то площадь фигуры, состоящей из точек сферы, соответствующих плоскостям, пересекающим эти дуги, меньше S.

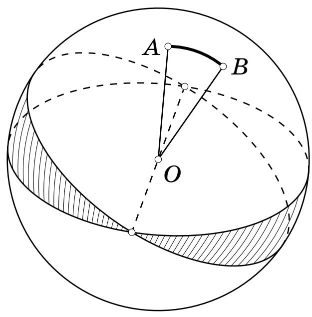


Рис. 7.1

7.6. Как и при решении задачи 7.5, сопоставим дуге AB часть сферы, заключённую между двумя плоскостями, проходящими через центр O сферы перпендикулярно прямым OA и OB. Площадь этой фигуры равна $(\alpha/\pi)S$, где α — угловая величина дуги AB, а S — площадь сферы. Если любая плоскость, проходящая через центр сферы, пересекает не менее n из этих дуг, то каждая точка сферы покрыта не менее чем n рассматриваемыми фигурами. Поэтому $\sum \frac{\alpha_i}{\pi} S \geqslant nS$, т. е. $\sum \alpha_i \geqslant n\pi$.

7.7. Для каждой пары данных точек A_i и A_j рассмотрим кратчайшую из дуг большого круга, соединяющих эти точки. Пусть α_{ij} — длина этой дуги, а d_{ij} — длина отрезка A_iA_j. Тогда $d_{ij} \geqslant \frac{2\alpha_{ij}}{\pi}$.

Все данные точки не могут лежать по одну сторону от плоскости, проходящей через центр сферы, поскольку иначе их выпуклая оболочка тоже лежала бы по одну сторону от этой плоскости. Если точки A_i и A_j лежат по разные стороны от плоскости, проходящей через центр сферы, то эта плоскость пересекает соединяющую их кратчайшую дугу большого круга. Пусть по одну сторону от этой плоскости лежит k точек, а по другую $m-k$ точек. Тогда плоскость пересекает не менее $k(m-k) \geqslant m-1$ рассматриваемых дуг. Поэтому согласно задаче 7.6 имеем $\sum \alpha_{ij} \geqslant (m-1)\pi$, а значит,

$$\sum d_{ij} \geqslant \sum \frac{2\alpha_{ij}}{\pi} \geqslant 2(m-1).$$

З а м е ч а н и е. По поводу другого доказательства см. задачу 11.52.

7.8. Полярный треугольник имеет углы $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$. Сумма углов сферического треугольника больше π, поэтому $3\pi-(a+b+c)>\pi$, т. е. $a+b+c<2\pi$.

7.9. Доказательство такое же, как и в евклидовой геометрии: если точка O равноудалена от точек A и B (прямых a и b) и точек B и C (прямых b и c), то она равноудалена и от точек A и C (прямых a и c).

7.10. а) Пусть O — центр сферы. Медианы сферического треугольника ABC пересекаются в точке, лежащей на луче OM, заданном вектором $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

б) Высоты сферического треугольника ABC пересекаются в точке, лежащей на луче OH, заданном вектором

$$w = \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}\operatorname{tg}\alpha + \overrightarrow{OB}\operatorname{tg}\beta + \overrightarrow{OC}\operatorname{tg}\gamma.$$

Проверим, например, что плоскости OAH и OBC перпендикулярны, т. е. скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA} \times w = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\operatorname{tg}\beta + \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}\operatorname{tg}\gamma$ и $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}$ равно нулю. Длины векторов $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}$ равны $\sin c$ и $\sin a$, а угол между ними равен β. Таким образом, нужно проверить равенство

$$\sin c \sin a \cos\beta \operatorname{tg}\beta - \sin b \sin a \cos\gamma \operatorname{tg}\gamma = 0.$$

Это равенство следует из теоремы синусов для сферических треугольников.

7.11. а) О т в е т: да, могла. Проведём через центр сферы две перпендикулярные плоскости. Прямая их пересечения пересекает сферу в диаметрально противоположных точках C и C'. Возьмём на пересечении сферы с этими плоскостями точки A и B так, чтобы обе они были ближе к C, чем к C'. В сферическом прямоугольном треугольнике ABC оба катета короче, чем в треугольнике ABC', а гипотенуза у них общая.

б) О т в е т: нет, неверно. Проведём через центр O сферы две перпендикулярные плоскости. Прямая их пересечения пересекает сферу в диаметрально противоположных точках C и C'. Возьмём на пересечении сферы с одной плоскостью точку A, чтобы она была равноудалена от точек C и C'. На пересечении сферы с другой плоскостью возьмём точки B и B' так, чтобы дуга BC была равна дуге $B'C'$. В сферических прямоугольных треугольниках ABC и $AB'C$ катет AC общий, а гипотенузы равны. Но катеты BC и $B'C$ не равны.

7.12. Согласно первой теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{-\cos b\cos c + \cos a}{\sin b\sin c}.$$

Поэтому

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha = \frac{-\cos(b+c)+\cos a}{\sin b\sin c} = \frac{2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin c},$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha = \frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c} = \frac{2\sin\frac{b-c+a}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin b\sin c}.$$

7.13. Согласно задаче 7.12 имеем

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sin p}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}, \quad \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Поэтому

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin p-\sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Аналогично получаем

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(p-b)}{\cos c}\frac{\gamma}{2}, \quad \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(p-a)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}$$

и

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin(p-a)+\sin(p-b)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

7.14. а) Воспользовавшись результатами задач 7.12 и 7.13, получим

$$\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} =$$
$$= \frac{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} =$$
$$= -\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin a\sin b}.$$

б) Из соотношений

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

следует, что

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}}.$$

Чтобы получить требуемое равенство, достаточно перемножить эти два равенства и преобразовать в числителях и знаменателях суммы и разности синусов и косинусов в произведения:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{\pi-\gamma+\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4},$$

$$\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2} = 2\sin\frac{a-b+c}{4}\sin\frac{b+c-a}{4} \quad \text{и т. д.}$$

7.15. Из первой теоремы косинусов следует, что $\cos c = \cos a\cos b$, а из второй теоремы косинусов следует, что $\cos\alpha = \sin\beta\cos a$ и $\cos\beta = \sin\alpha\cos b$.

Согласно теореме синусов $\sin\alpha\sin b = \sin\beta\sin a$, поэтому

$$\sin\alpha\sin b\cdot\cos a = (\sin\beta\cos a)\sin a = \cos\alpha\sin a$$

т. е. $\operatorname{tg}\alpha\sin b = \operatorname{tg} a$.

Согласно теореме синусов $\sin a = \sin\alpha\sin c$, поэтому

$$\sin a\cos c = \sin\alpha\sin c\cos c = \sin\alpha\sin c\cos a\cos b = \sin c\cos a\cos\beta,$$

т. е. $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c\cos\beta$.

7.16. Пусть I — центр вписанной окружности сферического треугольника ABC, K — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Тогда $AK = p-a$, $IK = \bar{r}$, $\angle IAK = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle AKI = \frac{\pi}{2}$. Поэтому согласно задаче 7.15 имеем

$$\operatorname{tg}\bar{r} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin(p-a).$$

Остаётся заметить, что согласно задаче 7.12 выполняется равенство

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}.$$

7.17. Пусть O — центр описанной окружности сферического треугольника ABC, M — середина стороны AB. Тогда $\angle OBM = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}-(\alpha-s)$. Поэтому согласно задаче 7.15 имеем

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \operatorname{tg}\bar{R}\sin(\alpha-s).$$

Остаётся заметить, что

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\beta-s)\sin(\gamma-s)}{\sin s\sin(\alpha-s)}};$$

эта формула получается из формулы для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ переходом к полярному треугольнику.

7.18. Пусть A_1 — середина стороны BC. Применим первую теорему косинусов к треугольникам AA_1B и AA_1C:

$$\cos c = \cos m_a\cos\frac{a}{2}+\sin m_a\sin\frac{a}{2}\cos\varphi;$$

$$\cos b = \cos m_a\cos\frac{a}{2}-\sin m_a\sin\frac{a}{2}\cos\varphi,$$

где $\varphi = \angle AA_1B = 180^\circ - \angle AA_1C$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

7.19. Ответ: нет, не обязательно. Согласно задаче 7.18 медианы сферического треугольника равны тогда и только тогда, когда выполняются равенства
$$\frac{\cos b+\cos c}{2\cos\frac{a}{2}}=\frac{\cos c+\cos a}{2\cos\frac{b}{2}}=\frac{\cos a+\cos b}{2\cos\frac{c}{2}}.$$
Мы будем строить равнобедренный треугольник с основанием $x=\cos a$ и боковой стороной $y=\cos b=\cos c$. В этом случае мы получаем уравнение
$$\frac{2y}{\sqrt{1+x}}=\frac{x+y}{\sqrt{1+y}}.$$
После возведения обеих частей в квадрат оно распадается на два уравнения: $x=y$ и $x^2+3xy+4y^2+x+3y=0$. Нас интересует второе уравнение.

Сферический равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b существует тогда и только тогда, когда выполняются неравенства $a\leqslant 2b$ и $a+2b<2\pi$, т.е. $\frac{a}{2}<b\leqslant\pi-\frac{a}{2}$. Для $x=\cos a$ и $y=\cos b$ мы получаем неравенство $2y^2<x+1$. Подставим соотношение $x=2y^2-1$ в уравнение $x^2+3xy+4y^2+x+3y=0$. В результате получим уравнение $2y^2(2y^2+3y+1)=0$. Оно имеет двукратный корень $y=0$ и корни $y=-1$ и $y=-\frac{1}{2}$. Этим значениям y соответствуют $x=-1$, $x=1$ и $x=-\frac{1}{2}$. Таким образом, кривые $x^2+3xy+{}$ $+4y^2+x+3y=0$ и $2y^2=x+1$ касаются в точке $A=(-1,0)$ и пересекаются в точках $B=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ и $C=(1,-1)$ (рис. 7.2). Все внутренние точки дуги BC первой из этих кривых соответствуют искомым равнобедренным треугольникам; основание такого треугольника может изменяться от 120° до 180°, а боковая сторона — от 120° до 90°.

7.20. Опустим из точек A, B, C сферические перпендикуляры AA_2, BB_2, CC_2 на сферическую прямую A_1B_1. Сферические треугольники A_1B_2B и A_1C_2C

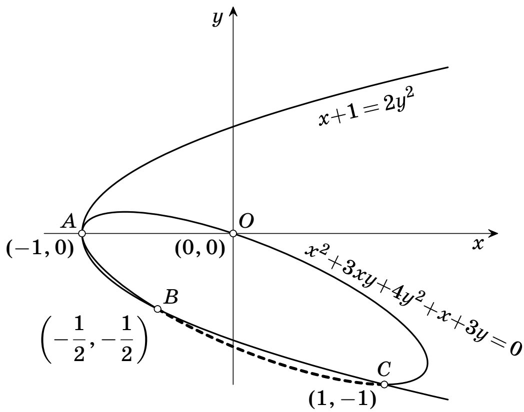


Рис. 7.2

симметричны относительно точки A_1, поэтому $BB_2 = CC_2$. Аналогично $AA_2 = CC_2$, а значит, $AA_2 = BB_2$. В сферическом четырёхугольнике ABB_2C_2 стороны AA_2 и BB_2 равны, а углы A_2 и B_2 прямые, поэтому он симметричен относительно серединного перпендикуляра к отрезку A_2B_2. Следовательно, этот серединный перпендикуляр совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку AB.

7.21. Пусть длины сторон рассматриваемого сферического треугольника ABC равны $2a$, $2b$ и $2c$, а длина средней линии B_1C_1 равна a'. Требуется доказать, что $a' > a$, т. е. $\cos 2a' < \cos 2a$. Согласно первой теореме косинусов

$$\cos a' = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$
$$\cos 2a = \cos 2b \cos 2c + \sin 2b \sin 2c \cos \alpha.$$

Если мы положим

$$x_1 = \cos b, \quad y_1 = \cos c, \quad x_2 = \sin b, \quad y_2 = \sin c \quad \text{и} \quad p = \cos \alpha,$$

то требуемое неравенство принимает вид

$$2(x_1y_1 + x_2y_2p)^2 - 1 < (2x_1^2 - 1)(2y_1^2 - 1) + 4x_1x_2y_1y_2p.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству

$$x_2^2y_2^2p^2 < (1 - x_1^2)(1 - y_1^2).$$

Остаётся заметить, что $x_1^2 = 1 - x_1^2$, $y_2^2 = 1 - y_1^2$ и $p^2 = \cos^2 \alpha < 1$.

7.22. Вершины вписанного сферического четырёхугольника лежат на одной окружности, поэтому они лежат в одной плоскости. Плоский четырёхугольник $ABCD$ с этими вершинами вписанный, поэтому для него можно записать теорему Птолемея: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. Длины сторон плоского четырёхугольника связаны с длинами сторон сферического четырёхугольникам соотношениями $AB = 2 \sin \frac{a}{2}$ и т. д. Подставив такие выражения в теорему Птолемея, получаем требуемое.

7.23. Рассмотрим для данного четырёхугольника полярный к нему четырёхугольник, а для конуса с вершиной в центре сферы и описанной окружностью в качестве основания — полярный конус. Полярный конус высекает на сфере окружность, в которую вписан полярный четырёхугольник. При замене многоугольника на полярный к нему многоугольник каждая вершина заменяется на сторону, а сторона — на вершину (вершина A соединяется с центром O сферы, и через точку O проводится плоскость, перпендикулярная отрезку OA, — таково это соответствие между точками и сторонами). При этом каждая сторона заменяется на угол, дополняющий до 180° угол, под которым видна данная сторона из центра сферы. Поэтому, применив формулу из задачи 7.22 к полярному четырёхугольнику, получаем требуемое.

7.24. Рассмотрим сначала сферический «двуугольник» — часть сферы, заключённую внутри двугранного угла величиной α, ребро которого проходит через центр сферы. Площадь такой фигуры пропорциональна α, а при $\alpha = \pi$ она равна $2\pi R^2$; следовательно, она равна $2\alpha R^2$.

Каждой паре плоскостей граней данного трёхгранного угла соответствуют два «двуугольника». Эти «двуугольники» покрывают данный криволинейный треугольник и треугольник, симметричный ему относительно центра сферы, в три слоя, а остальную часть сферы в один слой. Следовательно, сумма их площадей равна площади поверхности сферы, увеличенной на $4S$, где S — площадь искомого треугольника. Поэтому $S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.

7.25. Рассмотрим множество концов дуг с началом в точке C, делящихся пополам большим кругом, проходящим через точки A_1 и B_1. Это множество является окружностью, проходящей через точки A и B и точку C', симметричную точке C относительно радиуса, делящего пополам дугу A_1B_1. Часть этой окружности, состоящая из концов дуг, пересекающих сторону A_1B_1 криволинейного треугольника A_1B_1C, лежит внутри криволинейного треугольника ABC. В частности, внутри треугольника ABC лежит точка C', а значит, $S_{ABC} > S_{A_1B_1C} + S_{A_1B_1C'}$ (имеются в виду площади криволинейных треугольников). Остаётся заметить, что $S_{A_1B_1C} = S_{A_1B_1C'}$, так как эти треугольники равны.

7.26. Разрежем n-гранный угол на $n-2$ трёхгранных, проведя плоскости через одно его ребро и несмежные с ним рёбра. Записав для каждого из этих трёхгранных углов формулу из задачи 7.24 и сложив эти формулы, получим требуемое.

7.27. Длина сферической окружности радиуса $\bar{r}$ равна $2\pi \sin \bar{r}$. Поэтому площадь сферического круга радиуса $\bar{r}$ равна

$$\int_0^r 2\pi \sin x\, dx = 2\pi(1 - \cos r) = 4\pi \sin^2(r/2).$$

7.28. Пусть M и N — точки пересечения сферы с прямой, проходящей через центр описанной окружности S треугольника ABC перпендикулярно его плоскости. Пусть $\alpha = \angle MBC = \angle MCB$, $\beta = \angle MAC = \angle MCA$ и $\gamma = \angle MAB = \angle MBA$ (имеются в виду углы на сфере). Этим величинам можно так приписать знаки, что будут выполняться равенства $\beta + \gamma = \angle A$, $\alpha + \gamma = \angle B$ и $\alpha + \beta = \angle C$; следовательно, $2\gamma = \angle A + \angle B - \angle C$. Каждый из углов A, B и C определён с точностью до 2π, поэтому угол γ определён с точностью до π. Равенство $\gamma + \angle MAB = \angle MBA$ определяет две точки M, симметричные относительно плоскости OAB, где O — центр сферы; если вместо γ взять $\gamma + \pi$, то вместо M получится точка N, т. е. окружность S не изменится. Искомому ГМТ принадлежат не все точки окружности, а лишь одна из дуг, определяемых точками A и B (какая именно — видно из знака числа $\angle A + \angle B - \angle C$). Итак, искомое ГМТ состоит из двух дуг окружностей, симметричных относительно плоскости OAB.

7.29. Площадь сферического треугольника ABC определяется величиной $\angle A + \angle B + \angle C$ (см. задачу 7.24). Пусть точки A' и B' диаметрально противоположны точкам A и B. Углы сферических треугольников ABC и $A'B'C'$ связаны следующим образом: $\angle A' = \pi - \angle A$ (см. рис. 7.3), $\angle B' = \pi - \angle B$, а углы при вершине C у них равны. Поэтому величина

$$\angle A' + \angle B' - \angle C = 2\pi - (\angle A + \angle B + \angle C)$$

постоянна. Искомое ГМТ состоит из двух дуг окружностей, проходящих через точки A' и B' (см. задачу 7.28).

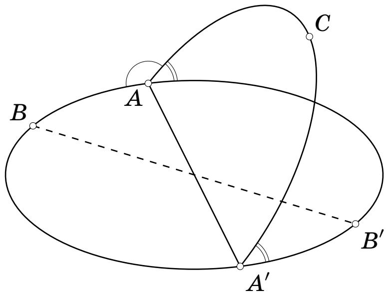


Рис. 7.3

7.30. а) Телесный угол пропорционален величине двугранного угла, а телесный угол двугранного угла, имеющего величину π, равен 2π.

б) См. задачу 7.26.

7.31. Пусть O — вершина конуса, Oh — его высота. Построим сферу радиуса 1 с центром O и рассмотрим ее сечение плоскостью, проходящей через прямую OH. Пусть A и B — точки конуса, лежащие на сфере; M — точка пересечения луча сферой (рис. 7.4). Тогда

$$HM = OM - OH = 1 - \cos\alpha.$$

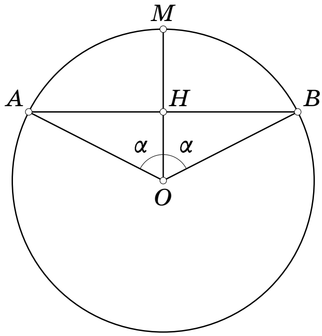


Рис. 7.4

Телесный угол конуса равен площади сферического сегмента, отсекаемого основанием конуса. Согласно задаче 4.22 эта площадь равна $2\pi Rh = 2\pi(1-\cos\alpha)$.

7.32. Телесный угол трёхгранного угла равен сумме его двугранных углов минус π (см. задачу 7.24), поэтому сумма телесных углов трёхгранных углов тетраэдра равна удвоенной сумме его двугранных углов минус 4π. А удвоенная сумма двугранных углов тетраэдра равна сумме их телесных углов.

7.33. Телесный угол при i-й вершине многогранника равен $\varsigma_i - (n_i - 2)\pi$, где ς_i — сумма двугранных углов при рёбрах, выходящих из неё, а n_i — число этих рёбер (см. задачу 7.26). Так как каждое ребро выходит ровно из двух вершин, то $\sum n_i = 2P$, где P — число рёбер. Поэтому сумма телесных углов многогранных углов равна $2\varsigma - 2(P-B)\pi$, где ς — сумма двугранных углов, B — число вершин. Остаётся заметить, что $P - B = \varGamma - 2$ (задача 13.20).

7.34. Применим индукцию по n. При $n=3$ требуемое утверждение следует из сферической первой теоремы косинусов:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha,$$

поэтому при возрастании угла α возрастает длина стороны a.

Предположим теперь, что требуемое утверждение доказано для выпуклых $(n-1)$-угольников. Начнем с того, что докажем его для выпуклых n-угольни-

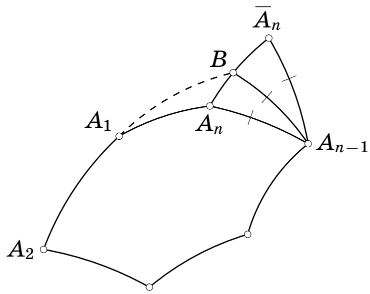


Рис. 7.5

ков, у которых равны углы при вершинах A_i и A'_i, $1 < i < n$. Действительно, треугольники $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ и $A'_{i-1}A'_iA'_{i+1}$ равны, поскольку у них равны две стороны и угол между ними. Поэтому у этих треугольников стороны $A_{i-1}A_{i+1}$ и $A'_{i-1}A'_{i+1}$ и углы при этих сторонах равны, а значит, к многоугольникам $A_1 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_n$ и $A'_1 \ldots A'_{i-1}A'_{i+1} \ldots A'_n$ можно применить предположение индукции.

Чтобы доказать шаг индукции, можно попытаться сделать равными углы при каких-нибудь двух вершинах, например при вершинах A_{n-1} и A'_{n-1}. Повернём для этого сторону $A_{n-1}A_n$ так, чтобы угол при вершине A_{n-1} увеличился и стал бы равен углу при вершине A'_{n-1}. Если в результате получится выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_{n-1}\overline{A}_n$, то доказательство завершено. Остается разобрать случай, когда получается невыпуклый многоугольник (рис. 7.5). В этом случае продолжение стороны A_1A_2 пересекает отрезок $A_n\overline{A}_n$ в некоторой точке B. Ясно, что $A_1B = A_2B - A_1A_2$ и $A'_1A'_n \geqslant A'_2A'_n - A'_1A'_2 = A'_2A'_n - A_1A_2$. К выпуклым $(n-1)$-угольникам $A_2A_3 \ldots A_{n-1}B$ и $A'_2A'_3 \ldots A'_{n-1}A'_n$ применимо предположение индукции, поэтому $A_2B \leqslant A'_2A'_n$, а значит, $A_1B \leqslant A'_1A'_n$. Кроме того, в треугольниках $A_1A_{n-1}A_n$ и $A_1A_{n-1}B$ стороны, выходящие из вершины A_{n-1}, равны, и $\angle A_1A_{n-1}A_n < \angle A_1A_{n-1}B$. Следовательно, $A_1A_n < A_1B \leqslant A'_1A'_n$.

7.35. Предположим, что помечен только один угол, например A_2. Тогда из задачи 7.34 следует, что либо $A_1A_n > A'_1A'_n$, либо $A_1A_n < A'_1A'_n$, чего не может быть. Те же самые рассуждения показывают, что все пометки не могут быть одинаковыми, среди них должны быть как плюсы, так и минусы. Поэтому остаётся лишь исключить ситуацию, когда можно провести отрезок PQ, разделяющий плюсы и минусы (рис. 7.6).

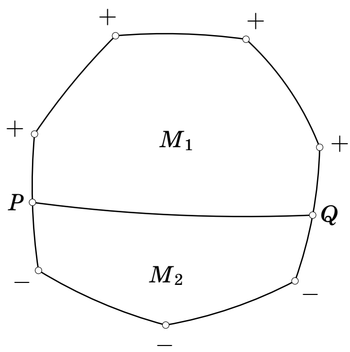


Рис. 7.6

Предположим, что такой отрезок можно провести. Пусть P' и Q' — соответствующие точки на сторонах многоугольника $A'_1 \ldots A'_n$. Применив задачу 7.34 к многоугольникам M_1 и M'_1, получим $PQ > P'Q'$, а применив ту же самую задачу к многоугольникам M_2 и M'_2, получим $PQ < P'Q'$.

7.36. Пусть O — центр сферы S, O_1 и O_2 — сферические центры окружностей C_1 и C_2. (У каждой окружности на сфере есть два сферических центра, но нас будет интересовать только плоскость OO_1O_2, а она не зависит от того, какой именно из двух сферических центров выбирается.) Пусть плоскости окружностей C_1 и C_2 пересекаются по прямой l. Прямая OO_1 перпендикулярна плоскости окружности C_1, поэтому она перпендикулярна прямой l. Аналогично $OO_2 \perp l$. Следовательно, прямая l перпендикулярна плоскости OO_1O_2, поэтому плоскость, содержащая точку O и прямую l, тоже перпендикулярна плоскости OO_1O_2.

7.37. Плоскости окружностей C_1, C_2 и C_3 могут: 1) пересекаться в одной точке A; 2) быть параллельными одной прямой l; 3) пересекаться по одной прямой l. В первом случае радикальные оси пересекаются в точках сферы, которые лежат на прямой, соединяющей центр сферы с точкой A. Во втором случае радикальные оси пересекаются в точках сферы, которые лежат на прямой, проходящей через центр сферы параллельно прямой l. В третьем случае радикальные оси совпадают.

7.38. а) Большая окружность A_1B_1 является радикальной осью окружностей C_1 и C, а большая окружность A_2B_2 является радикальной осью окружностей C_2 и C. Согласно задаче 7.37 точка пересечения этих двух радикальных осей лежит на радикальной оси окружностей C_1 и C_2, которая является фиксированной большой окружностью.

б) Решение аналогично.

7.39. Пусть XA_1 и XA_2 — равные дуги больших окружностей, касающихся окружностей C_1 и C_2 в точках A_1 и A_2. Тогда существует окружность C, касающаяся окружностей C_1 и C_2 в точках A_1 и A_2. Согласно задаче 7.38 точки пересечения больших окружностей XA_1 и XA_2 лежат на радикальной оси окружностей C_1 и C_2.

7.40. Пусть окружность C пересекает окружности C_1 и C_2 в точках A_1 и A_2. Тогда XA_1 и XA_2 — равные дуги больших окружностей, касающихся окружностей C_1 и C_2 в точках A_1 и A_2. Поэтому требуемое утверждение следует из задачи 7.39.

ГЛАВА 8

ТЕТРАЭДР

§ 1. Медианы и бимедианы тетраэдра

Медианой тетраэдра называют отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани.

8.1. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении $3:1$, считая от вершины.

8.2. Пусть AA_1 — медиана тетраэдра $ABCD$. Докажите, что

$$AA_1^2 = \frac{1}{3}\Big(AB^2 + AC^2 + AD^2 - \frac{1}{3}(BC^2 + CD^2 + DB^2)\Big).$$

8.3. а) Докажите, что сумма квадратов длин медиан тетраэдра равна $\frac{4}{9}$ суммы квадратов длин его рёбер.

б) Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки пересечения медиан тетраэдра до его вершин равна $\frac{1}{4}$ суммы квадратов длин его рёбер.

Бимедианой тетраэдра называют отрезок, соединяющий середины двух противоположных рёбер. Всего у тетраэдра три бимедианы.

8.4. Докажите, что бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке.

См. также задачи 3.22, 2.26.

§ 2. Свойства тетраэдра

8.5. В любом ли тетраэдре высоты пересекаются в одной точке?

8.6. а) Через вершину A тетраэдра $ABCD$ проведены три плоскости, перпендикулярные противоположным рёбрам. Докажите, что все эти плоскости пересекаются по одной прямой.

б) Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, перпендикулярная противоположной грани и содержащая центр её описанной окружности. Докажите, что эти четыре плоскости пересекаются в одной точке.

8.7. Докажите, что центр вписанной в тетраэдр сферы лежит внутри тетраэдра, образованного точками касания.

8.8. Пусть S_1 и S_2 — площади граней тетраэдра, прилегающих к ребру a; α — двугранный угол при этом ребре; b — ребро, противоположное a; φ — угол между рёбрами b и a. Докажите, что

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = \frac{(ab\sin\varphi)^2}{4}.$$

8.9. Докажите, что произведение длин двух противоположных рёбер тетраэдра, делённое на произведение синусов двугранных углов при этих рёбрах, одно и то же для всех трёх пар противоположных ребер тетраэдра (*теорема синусов для тетраэдра*).

8.10. а) Пусть S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади граней тетраэдра; P_1, P_2 и P_3 — площади граней параллелепипеда, грани которого проходят через рёбра тетраэдра параллельно его противоположным рёбрам. Докажите, что

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2.$$

б) Пусть h_1, h_2, h_3 и h_4 — высоты тетраэдра, d_1, d_2, и d_3 — расстояния между его противоположными рёбрами. Докажите, что

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} = \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2}.$$

8.11. Пусть S_i, R_i и l_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — площади граней, радиусы описанных около этих граней кругов и расстояния от центров этих кругов до противоположных вершин тетраэдра. Докажите, что $18V^2 = \sum\limits_{i=1}^{4} S_i^2(l_i^2 - R_i^2)$, где V — объём тетраэдра.

8.12. Докажите, что для любого тетраэдра существует треугольник, длины сторон которого равны произведениям длин противоположных рёбер тетраэдра, причём площадь S этого треугольника равна $6VR$, где V — объём тетраэдра, R — радиус его описанной сферы (*формула Крелле*).

8.13. Пусть a и b — длины двух скрещивающихся рёбер тетраэдра, α и β — двугранные углы при этих рёбрах. Докажите, что величина $a^2 + b^2 + 2ab\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$ не зависит от выбора пары скрещивающихся рёбер (*теорема Бретшнейдера*).

8.14. Докажите, что для любого тетраэдра существует не менее пяти и не более восьми сфер, каждая из которых касается всех плоскостей его граней.

8.15. Плоскость Π пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$ или их продолжения в шести точках. Для каждой из этих точек рассмотрим точку, симметричную ей относительно середины соответствующего ребра. Докажите, что полученные шесть точек лежат в одной плоскости.

См. также задачи 2.32, 2.36, 3.25, 3.29, 3.31.

§ 3. Правильный тетраэдр

8.16. Точка O — центр шара, вписанного в правильный тетраэдр $ABCD$. Прямая XO, соединяющая O с точкой X, лежащей внутри тетраэдра, пересекает плоскости граней в точках A', B', C', D'. Докажите, что

$$\frac{XA'}{OA'}+\frac{XB'}{OB'}+\frac{XC'}{OC'}+\frac{XD'}{OD'}=4.$$

См. также задачи 2.11, 2.16, 3.24.

§ 4. Тетраэдры, обладающие специальными свойствами

8.17. Сумма длин одной пары скрещивающихся рёбер тетраэдра равна сумме длин другой пары. Докажите, что сумма двугранных углов при первой паре рёбер равна сумме двугранных углов при второй паре.

8.18. Сфера касается рёбер AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках L, M, N и K, являющихся вершинами квадрата. Докажите, что если эта сфера касается ребра AC, то она касается и ребра BD.

8.19. Пусть M — центр масс тетраэдра $ABCD$, O — центр его описанной сферы.

а) Докажите, что прямые DM и OM перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AB^2+BC^2+CA^2=AD^2+BD^2+CD^2$.

б) Докажите, что если точки D и M и точки пересечения медиан граней, сходящихся в вершине D, лежат на одной сфере, то $DM\perp OM$.

§ 5. Прямоугольный тетраэдр

> Тетраэдр $ABCD$ называют *прямоугольным*, если все плоские углы при одной из его вершин прямые.

8.20. Докажите, что в прямоугольном тетраэдре с прямыми плоскими углами при вершине D сумма квадратов площадей трёх его прямоугольных граней равна площади грани ABC.

8.21. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине D прямые. Пусть $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$ и $\angle ACB = \varphi$. Докажите, что $\cos\varphi = \sin\alpha\sin\beta$.

8.22. Все плоские углы при одной вершине тетраэдра прямые. Докажите, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных рёбер, равны.

8.23. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине D прямые. Пусть h — высота тетраэдра, опущенная из вершины D; a, b и c — длины рёбер, выходящих из вершины D. Докажите, что

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

8.24. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине A прямые и $AB = AC + AD$. Докажите, что сумма плоских углов при вершине B равна 90°.

* * *

8.25. Три двугранных угла тетраэдра прямые. Докажите, что у этого тетраэдра есть три плоских прямых угла.

8.26. В тетраэдре три двугранных угла прямые. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных рёбер, равен a, а другой b, причём $b > a$. Найдите длину наибольшего ребра тетраэдра.

8.27. Три двугранных угла тетраэдра, не принадлежащие одной вершине, равны 90°, а все остальные двугранные углы равны между собой. Найдите эти углы.

§ 6. Равногранный тетраэдр

Тетраэдр $ABCD$ называют *равногранным*, если все его грани равны. Легко проверить, что тетраэдр равногранный тогда и только тогда, когда $AB = CD$, $BC = AD$ и $AC = BD$.

8.28. Докажите, что тетраэдр равногранный тогда и только тогда, когда попарно равны его противолежащие двугранные углы.

8.29. Докажите, что тетраэдр равногранный тогда и только тогда, когда величины всех телесных углов равны.

8.30. Существует ли равногранный тетраэдр, противоположные пары рёбер которого имеют длину 8, 10 и 13?

8.31. Докажите, что все грани тетраэдра равны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) сумма плоских углов при какой-либо вершине равна 180°, и, кроме того, в тетраэдре есть две пары равных противоположных рёбер;

б) центры вписанной и описанной сфер совпадают;

в) радиусы описанных окружностей граней равны;

г) центр масс и центр описанной сферы совпадают.

8.32. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AB и DC равны; равны также двугранные углы при рёбрах BC и AD. Докажите, что $AB = DC$ и $BC = AD$.

8.33. Прямая, проходящая через центр масс тетраэдра и центр его описанной сферы, пересекает рёбра AB и CD. Докажите, что $AC = BD$ и $AD = BC$.

8.34. Прямая, проходящая через центр масс тетраэдра и центр его вписанной сферы, пересекает рёбра AB и CD. Докажите, что $AC = BD$ и $AD = BC$.

8.35. Докажите, что если $\angle BAC = \angle ABD = \angle ACD = \angle BDC$, то тетраэдр $ABCD$ равногранный.

8.36. Дан тетраэдр $ABCD$; O_a, O_b, O_c и O_d — центры вневписанных сфер, касающихся его граней BCD, ACD, ABD и ABC. Докажите, что если трёхгранные углы O_aBCD, O_bACD, O_cABD и O_dABC прямые, то все грани данного тетраэдра равны.

8.37. Докажите, что если все грани тетраэдра имеют одинаковую площадь, то они равны.

8.38. Рёбра равногранного тетраэдра равны a, b и c. Вычислите его объём V и радиус R описанной сферы.

8.39. Докажите, что для равногранного тетраэдра:

а) радиус вписанного шара вдвое меньше радиуса шара, касающегося одной грани тетраэдра и продолжений трёх других граней;

б) центры четырёх вневписанных шаров являются вершинами тетраэдра, равного исходному.

8.40. В равногранном тетраэдре $ABCD$ опущена высота AH; H_1 — точка пересечения высот грани BCD; h_1 и h_2 — длины отрезков, на которые одна из высот грани BCD делится точкой H_1.

а) Докажите, что точки H и H_1 симметричны относительно центра описанной окружности треугольника BCD.

б) Докажите, что $AH^2 = 4h_1h_2$.

8.41. Докажите, что в равногранном тетраэдре основания высот, середины высот и точки пересечения высот граней принадлежат одной сфере.

8.42. а) Докажите, что сумма косинусов двугранных углов равногранного тетраэдра равна 2.

б) Сумма плоских углов трёхгранного угла равна 180°. Найдите сумму косинусов его двугранных углов.

См. также задачи 2.33, 2.34, 8.58, 18.28.

§ 7. Ортоцентрический тетраэдр

Тетраэдр называют *ортоцентрическим*, если все его высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке (эту точку называют *ортоцентром*). Не любой тетраэдр является ортоцентрическим (см. задачу 8.5).

8.43. а) Докажите, что если $AD \perp BC$, то высоты, опущенные из вершин B и C (а также высоты, опущенные из вершин A и D), пересекаются в одной точке, причём эта точка лежит на общем перпендикуляре к AD и BC.

б) Докажите, что если высоты, опущенные из вершин B и C, пересекаются в одной точке, то $AD \perp BC$ (а значит, в одной точке пересекаются высоты, опущенные из вершин A и D).

в) Докажите, что тетраэдр ортоцентрический тогда и только тогда, когда две пары его противоположных рёбер перпендикулярны (в этом случае третья пара противоположных рёбер тоже перпендикулярна).

8.44. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре общие перпендикуляры к парам противоположных рёбер пересекаются в одной точке.

8.45. Пусть K, L, M и N — середины рёбер AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$.

а) Докажите, что $AC \perp BD$ тогда и только тогда, когда $KM = LN$.

б) Докажите, что тетраэдр ортоцентрический тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, равны.

8.46. а) Докажите, что если $BC \perp AD$, то высоты, опущенные из вершин A и D на прямую BC, попадают в одну точку.

б) Докажите, что если высоты, опущенные из вершин A и D на прямую BC, попадают в одну точку, то $BC \perp AD$ (а значит, в одну точку попадают высоты, опущенные из вершин B и C на прямую AD).

8.47. Докажите, что тетраэдр ортоцентрический тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

а) суммы квадратов противоположных рёбер равны;

б) произведения косинусов противоположных двугранных углов равны;

в) углы между противоположными рёбрами равны.

Замечание. Есть ещё и другие условия, определяющие ортоцентрические тетраэдры; см., например, задачи 2.13 и 11.10.

8.48. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре:

а) все плоские углы при одной вершине одновременно либо острые, либо прямые, либо тупые;

б) одна из граней — остроугольный треугольник.

8.49. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре выполняется соотношение $OH^2 = 4R^2 - 3d^2$, где O — центр описанной сферы, R — точка пересечения высот, H — радиус описанной сферы, d — расстояние между серединами противоположных рёбер.

8.50. а) Докажите, что окружности 9 точек треугольников ABC и DBC принадлежат одной сфере тогда и только тогда, когда $BC \perp AD$.

б) Докажите, что для ортоцентрического тетраэдра окружности 9 точек всех граней принадлежат одной сфере.

в) Докажите, что если $AD \perp BC$, то сфера, содержащая окружности 9 точек треугольников ABC и DBC, и сфера, содержащая окружности 9 точек треугольников ABC и CBD, пересекаются по окружности, лежащей в плоскости, которая делит пополам общий перпендикуляр к BC и AD и ему перпендикулярна.

8.51. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре центры масс граней, точки пересечения высот граней, а также точки, делящие отрезки, соединяющие точку пересечения высот с вершинами, в отношении $2:1$, считая от вершины, лежат на одной сфере.

8.52. а) Пусть H — точка пересечения высот ортоцентрического тетраэдра, M' — центр масс какой-либо грани, N — точка пересечения луча HM' с описанной сферой тетраэдра. Докажите, что $HM' : M'N = 1:2$.

б) Пусть M — центр масс ортоцентрического тетраэдра, H' — точка пересечения высот какой-либо грани, N — точка пересечения луча $H'M$ с описанной сферой тетраэдра. Докажите, что $H'M : MN = 1:3$.

8.53. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре точка Монжа совпадает с точкой пересечения высот.

См. также задачи 2.13, 11.10, 11.11, 11.15.

§ 8. Каркасный тетраэдр

Тетраэдр называют *каркасным*, если существует сфера, касающаяся всех его рёбер.

8.54. Докажите, что тетраэдр является каркасным тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих свойств:

а) суммы длин пар противоположных рёбер равны;

б) окружности, вписанные в грани, попарно касаются;

в) перпендикуляры к плоскостям граней, восставленные из центров вписанных окружностей граней, пересекаются в одной точке.

8.55. Докажите, что тетраэдр является каркасным тогда и только тогда, когда при развёртке на плоскость каждой пары граней с общим ребром получается описанный четырёхугольник.

8.56. Докажите, что у каркасного тетраэдра суммы пар противоположных двугранных углов равны.

§ 9. Достраивание тетраэдра

Проведя через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру, тетраэдр можно достроить до параллелепипеда (рис. 8.1).

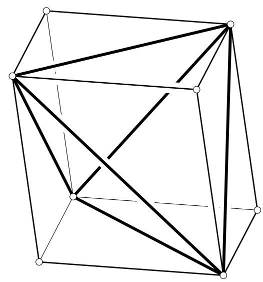


Рис. 8.1

8.57. Три отрезка, не лежащих в одной плоскости, пересекаются в точке O, делящей каждый из них пополам. Докажите, что существуют ровно два тетраэдра, в которых эти отрезки соединяют середины противоположных рёбер.

8.58. Докажите, что все грани тетраэдра равны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) при достраивании тетраэдра получается прямоугольный параллелепипед;

б) отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, перпендикулярны;

в) центр масс и центр вписанной сферы совпадают.

8.59. Докажите, что в равногранном тетраэдре все плоские углы острые.

8.60. Докажите, что сумма квадратов длин рёбер тетраэдра равна учетверённой сумме квадратов расстояний между серединами его противоположных рёбер.

8.61. Пусть a и a_1, b и b_1, c и c_1 — длины пар противоположных рёбер тетраэдра; α, β, γ — соответственные углы между ними ($\alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$). Докажите, что одно из трёх чисел $aa_1 \cos\alpha$, $bb_1 \cos\beta$ и $cc_1 \cos\gamma$ — сумма двух других.

8.62. Прямая l проходит через середины рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$; плоскость Π, содержащая l, пересекает рёбра BC и AD в точках M и N. Докажите, что прямая l делит отрезок MN пополам.

8.63. Докажите, что прямые, соединяющие середину высоты правильного тетраэдра с вершинами грани, на которую эта высота опущена, попарно перпендикулярны.

См. также задачи 3.4, 8.37.

§ 10. Точка Монжа

8.64. Докажите, что шесть плоскостей, проведённых через середины рёбер тетраэдра перпендикулярно противоположным рёбрам, пересекаются в одной точке Ω.

Точку Ω из задачи 8.64 называют *точкой Монжа*.

8.65. Докажите, что точка Монжа лежит в плоскости одной из граней тетраэдра тогда и только тогда, когда основание высоты, опущенной на эту грань, лежит на её описанной окружности.

8.66. Точка Монжа Ω тетраэдра $ABCD$ лежит в плоскости грани ABC.

а) Докажите, что высоты треугольников DBC, DCA, DAB, проведённые из вершины D, лежат в одной плоскости.

б) Докажите, что диаметры описанных окружностей треугольников DBC, DCA, DAB, проведённые из точки D, лежат в одной плоскости.

§ 11. Изогональное сопряжение

Один подход к изогональному сопряжению относительно тетраэдра уже обсуждался в § 6 (см. задачу 6.34). Здесь мы обсудим другой подход и докажем некоторые свойства изогонального сопряжения.

Сначала определим изогональное сопряжение относительно двугранного угла. Рассмотрим две полуплоскости α и β (грани двугранного угла) с общей граничной прямой l (его ребро). Пусть точка P не принадлежит ни одной из двух плоскостей, содержащих грани данного двугранного угла. Будем говорить, что точка Q *изогонально сопряжена* точке P относительно данного двугранного угла, если она лежит в плоскости, симметричной плоскости Pl относительно биссекторной плоскости двугранного угла. Таким образом, изогональное сопряжение относительно двугранного угла сопоставляет точке целую плоскость.

8.67. На плоскости дан угол с вершиной A и точки P и Q, не лежащие на его сторонах или их продолжениях. Точки P_α и Q_α — проекции точек P и Q на одну сторону угла, P_β и Q_β — проекции на другую сторону. Докажите, что точка Q лежит на прямой, симметричной прямой AP относительно биссектрисы данного угла, тогда и только тогда, когда точки P_α, Q_α, P_β и Q_β лежат на одной окружности.

8.68. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно двугранного угла с гранями α и β. Пусть P_α, P_β, Q_α и Q_β — проекции точек P и Q на грани. Докажите, что точки P_α, P_β, Q_α и Q_β лежат на сфере с центром в середине отрезка PQ.

8.69. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно двугранного угла с гранями α и β. Пусть P_α и P_β — проекции точки P на грани. Докажите, что прямая $P_\alpha P_\beta$ перпендикулярна плоскости, проходящей через точку Q и ребро двугранного угла.

Определим теперь изогональное сопряжение относительно трёхгранного угла. Будем говорить, что точка Q *изогонально сопряжена* точке P относительно данного трёхгранного угла, если она изогонально сопряжена ей относительно всех трёх двугранных углов.

8.70. Докажите, что множество точек, изогонально сопряжённых относительно трёхгранного угла точке P, не лежащей в плоскостях граней, представляет собой прямую, проходящую через вершину трёхгранного угла.

8.71. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно трёхгранного угла $SABC$. Пусть A', B', C' — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на плоскости SBC, SAC, SAB. Докажите, что плоскость $A'B'C'$ перпендикулярна прямой SQ.

Наконец, определим изогональное сопряжение относительно тетраэдра $ABCD$. Будем говорить, что точка Q *изогонально сопряжена* точке P относительно тетраэдра $ABCD$, если она изогонально сопряжена ей относительно всех шести его двугранных углов. Такие же рассуждения, как при решении задачи 6.34 (при этом вместо задачи 6.33 (б) можно использовать эквивалентную ей задачу 8.70), показывают, что для любой точки P, не лежащей на рёбрах тетраэдра или их продолжениях, есть ровно одна изогонально сопряжённая с ней точка Q (эта точка может быть бесконечно удалённой).

8.72. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно тетраэдра $ABCD$. Докажите, что проекции этих точек на плоскости граней тетраэдра лежат на одной сфере, центром которой служит середина отрезка PQ.

См. также задачи 8.73, 8.74, 18.29.

§ 12. Подерный тетраэдр

Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — проекции точки P на плоскости BCD, ACD, ABD, ABC. Тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ называют *подерным тетраэдром* точки P относительно тетраэдра $ABCD$.

8.73. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно тетраэдра $ABCD$. Докажите, что грани подерного тетраэдра точки P перпендикулярны прямым, соединяющим точку Q с вершинами тетраэдра $ABCD$.

8.74. Точка O' изогонально сопряжена центру O описанной сферы тетраэдра $ABCD$ относительно того же тетраэдра. Докажите, что подерный тетраэдр точки O' гомотетичен тетраэдру, грани которого касаются описанной сферы в вершинах тетраэдра $ABCD$.

См. также задачу 8.72.

§ 13. Прямая Эйлера

Для треугольника прямая Эйлера определяется как прямая, проходящая через центр описанной окружности O, точку пересечения медиан M и точку пересечения высот H. Для тетраэдра определить прямую Эйлера можно разными способами, причём разные определения в случае тетраэдра дают разные прямые, хотя в случае треугольника они дают одну и ту же прямую.

Первая прямая Эйлера тетраэдра $ABCD$ — это прямая, проходящая через центр описанной сферы O и точку пересечения медиан M.

Вторая прямая Эйлера тетраэдра $ABCD$ — это прямая, проходящая через центр описанной сферы O и точку O', изогонально сопряжённую с точкой O. (В тетраэдре высоты не всегда пересекаются в одной точке, но вместо точки пересечения высот можно взять точку, изогонально сопряжённую с центром описанной сферы, поскольку для треугольника точка пересечения высот изогонально сопряжена центру описанной окружности.)

8.75. Докажите, что первая прямая Эйлера тетраэдра $ABCD$ — это множество всех таких точек X, что

$$\frac{AX^2-BX^2}{AM^2-BM^2}=\frac{AX^2-CX^2}{AM^2-CM^2}=\frac{AX^2-DX^2}{AM^2-DM^2}.$$

§ 14. Сфера 12 точек

Сферой 12 *точек* называют сферу, проходящую через центры масс граней тетраэдра.

8.76. Докажите, что описанная сфера тетраэдра переходит в сферу 12 точек при гомотетии:

а) с центром в точке пересечения медиан M и коэффициентом $-\frac{1}{3}$;

б) с центром в точке Монжа Ω и коэффициентом $\frac{1}{3}$;

Из задачи 8.76 (б) следует, что центр сферы 12 точек расположен на отрезке $O\Omega$ и делит его в отношении $1:2$, считая от точки Ω, а радиус сферы 12 точек равен $\frac{R}{3}$, где R — радиус описанной сферы.

8.77. точка A_1 лежит на отрезке ΩA, причём $\Omega A_1 : A_1 A = 1:3$. Докажите, что проекция A_2 точки A_1 на плоскость BCD лежит на сфере 12 точек.

8.78. Докажите, что расстояние от центра сферы 12 точек до плоскости грани тетраэдра равно $\frac{1}{6}$ длины отрезка, высекаемого описанной сферой на высоте, опущенной на эту грань.

8.79. Докажите, что высота тетраэдра $ABCD$, проведённая из вершины D, касается описанной сферы тогда и только тогда, когда центр сферы 12 точек лежит в плоскости ABC.

См. также задачи 8.51, 8.52.

§ 15. Ортологические тетраэдры

8.80. Тетраэдры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ обладают следующим свойством: плоскости, проходящие через середины сторон первого тетраэдра перпендикулярно соответственным сторонам второго тетраэдра, пересекаются в одной точке. Докажите, что тогда плоскости, проходящие через середины сторон второго тетраэдра перпендикулярно соответственным сторонам первого тетраэдра тоже пересекаются в одной точке.

Тетраэдры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ из задачи 8.80 называют *ортологическими*.

8.81. Тетраэдры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ обладают следующим свойством: плоскости, проходящие через середины сторон первого тетраэдра перпендикулярно противоположным сторонам второго тетраэдра, пересекаются в одной точке. Докажите, что тогда плоскости, проходящие через середины сторон второго тетраэдра перпендикулярно противоположным сторонам первого тетраэдра, тоже пересекаются в одной точке.

См. также задачу 21.26.

§ 16. Точки Лемуана

Для треугольника у точки Лемуана есть несколько эквивалентных определений. Для тетраэдра эти определения становятся неэквивалентными и дают, вообще говоря, разные точки.

Первой точкой Лемуана тетраэдра $ACBD$ называют точку K внутри этого тетраэдра, для которой сумма квадратов расстояний до плоскостей его граней минимальна.

8.82. Докажите, что точка внутри тетраэдра $ABCD$, для которой сумма квадратов расстояний до плоскостей его граней минимальна, имеет барицентрические координаты $(S_A^2 : S_B^2 : S_C^2 : S_D^2)$, где S_A — площадь грани BCD и т. д.

8.83. Докажите, что первая точка Лемуана K изогонально сопряжена центру масс тетраэдра.

Для тетраэдра $ABCD$ *симедиана* AA_1 определяется следующим образом. Точка A_1 выбирается внутри треугольника BCD так, чтобы расстояния от неё до рёбер BC, CD, DB были обратно пропорциональны противолежащим рёбрам AD, AB, AC соответственно.

8.84. Докажите, что симедианы AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке L.

Точку L, в которой пересекаются симедианы тетраэдра, называют *второй точкой Лемуана* тетраэдра.

8.85. Найдите барицентрические координаты второй точки Лемуана.

8.86. Рассмотрим сечение $A'B'C'$ трёхгранного угла при вершине D тетраэдра $ABCD$ плоскостью, параллельной касательной плоскости к описанной сфере в точке D. Докажите, что симедиана DD_1 проходит через центр вписанной окружности треугольника $A'B'C'$.

Решения

8.1. Достаточно доказать, что любые две медианы тетраэдра пересекаются и делятся точкой пересечения в отношении $3:1$, считая от вершины. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения медиан граней BCD и ACD, O — середина ребра CD. Медианы AA_1 и BB_1 данного тетраэдра лежат в плоскости ABO, поэтому они пересекаются в некоторой точке M. Ясно также, что $\frac{AM}{MA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AO}{OB_1} = 3$.

8.2. Пусть O — середина ребра CD. Используя формулу для длины медианы треугольника, получаем $AO^2 = \frac{2AC^2 + 2AD^2 - CD^2}{4}$ и $BO^2 = \frac{2BC^2 + 2BD^2 - CD^2}{4}$.

Пусть $\angle AA_1O=\varphi$. Тогда по теореме косинусов

$$AA_1^2+\frac{1}{9}BO^2-\frac{2}{3}AA_1\cdot BO=AO^2,$$

$$AA_1^2+\frac{4}{9}BO^2+\frac{4}{3}AA_1\cdot BO=AB^2.$$

Умножим первое уравнение на 2 и сложим его со вторым уравнением. В результате получим $3AA_1^2=AB^2+2AO^2-\frac{2}{3}BO^2$. Остаётся подставить в это выражение полученные выше выражения для AO^2 и BO^2.

8.3. а) Запишем выражения для квадрата длины медианы из задачи 8.2 для всех медиан и сложим их. В результате получим требуемое.

б) Непосредственно следует из задачи (а), так как расстояние от точки пересечения медиан до вершины равно $\frac{3}{4}$ длины соответствующей медианы.

8.4. Пусть P, Q, R и S — середины рёбер AB, BC, CD и DA. Отрезки P и RS параллельны отрезку AC, и их длины равны половине длине этого отрезка, поэтому $PQRS$ — параллелограмм. Следовательно, бимедианы PR и RS, которые являются диагоналями этого параллелограмма, пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения пополам. Аналогично доказывается, что третья бимедиана проходит через середины этих двух бимедиан.

8.5. О т в е т: не в любом. Рассмотрим треугольник ABC, в котором угол A не прямой, и восставим к плоскости треугольника перпендикуляр AD. В тетраэдре $ABCD$ высоты, проведённые из вершин C и D, не пересекаются.

8.6. а) Перпендикуляр, опущенный из вершины A на плоскость BCD, принадлежит всем трём данным плоскостям.

б) Легко проверить, что все указанные плоскости проходят через центр описанной сферы тетраэдра.

8.7. Достаточно доказать, что если сфера вписана в трёхгранный угол, то плоскость, проходящая через точки касания, разделяет вершину S трёхгранного угла и центр O вписанной сферы. Плоскость, проходящая через точки касания, совпадает с плоскостью, проходящей через окружность, по которой конус с вершиной S касается данной сферы. Ясно, что эта плоскость разделяет точки S и O; для доказательства можно рассмотреть любое сечение, проходящее через точки S и O.

8.8. Проекция тетраэдра на плоскость, перпендикулярную ребру a, является треугольником со сторонами $2\frac{S_1}{a}$, $2\frac{S_2}{a}$ и $b\sin\varphi$; угол между первыми двумя сторонами равен α. Записав теорему косинусов для этого треугольника, получаем требуемое.

8.9. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$. Пусть $AB=a$, $CD=b$; α и β — двугранные углы при рёбрах AB и CD; S_1 и S_2 — площади граней ABC и ABD, S_3 и S_4 — площади граней CDA и CDB; V — объём тетраэдра. Согласно задаче 3.3 имеем $V=2S_1S_2\sin\frac{\alpha}{3a}$ и $V=2S_3S_4\sin\frac{\beta}{3b}$. Следовательно, $ab:(\sin\alpha\sin\beta)=$ $=4S_1S_2S_3S_4:9V^2$.

8.10. а) Пусть α, β и γ — двугранные углы при рёбрах грани с площадью S_1. Тогда $S_1 = S_2\cos\alpha + S_3\cos\beta + S_4\cos\gamma$ (см. задачу 2.15). Кроме того, согласно задаче 8.8 имеем

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = P_1^2,$$
$$S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3\cos\beta = P_2^2,$$
$$S_1^2 + S_4^2 - 2S_1S_4\cos\gamma = P_3^2.$$

Следовательно,

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + 3S_1^2 - 2S_1(S_2\cos\alpha + S_3\cos\beta + S_4\cos\gamma) = \\ = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2.$$

б) Поделив обе части полученного в задаче (а) равенства на $9V^2$, где V — объём тетраэдра, приходим к требуемому.

8.11. Доказательство проведём сначала в случае, когда центр описанного шара находится внутри тетраэдра. Прежде всего докажем, что $l_i^2 - R_i^2 = 2h_id_i$, где d_i — расстояние от центра описанного шара до i-й грани, h_i — высота тетраэдра, опущенная на эту грань. Для определённости будем считать, что номер i соответствует грани ABC. Пусть O — центр описанной сферы тетраэдра $ABCD$, O_1 — проекция O на грань ABC, DH — высота, H_1 — проекция O на DH. Тогда $O_1H^2 = DO_1^2 - DH^2 = l_i^2 - h_i^2$ и $OH_1^2 = DO^2 - DH_1^2 = R^2 - (h_i - d_i)^2 = R^2 - d_i^2 + 2h_id_i - h_i^2$, где R — радиус описанной сферы тетраэдра. Так как $O_1H = OH_1$, то $l_i^2 - R^2 + d_i^2 = 2h_id_i$. Остаётся заметить, что $R_i^2 = AO_1^2 = AO^2 - OO_1^2 = R^2 - d_i^2$.

Завершают доказательство следующие преобразования:

$$\sum S_i^2(l_i^2 - R_i^2) = \sum 2S_i^2(h_id_i) = \sum 2S_i^2h_i^2\frac{d_i}{h_i} = 18V^2\sum\frac{d_i}{h_i}.$$

Согласно задаче 13.7 (б) $\sum\dfrac{d_i}{h_i} = 1$.

В случае, когда центр описанного шара находится вне тетраэдра, рассуждения почти не изменяются: нужно только одну из величин d_i считать отрицательной.

8.12. Пусть длины рёбер AD, BD и CD равны a, b и c; длины рёбер BC, CA и AB равны a', b' и c'. Проведём через вершину D плоскость Π, касающуюся описанной около тетраэдра сферы. Рассмотрим тетраэдр A_1BC_1D, образованный плоскостями Π, BCD, ABD и плоскостью, проходящей через вершину B параллельно плоскости ACD, и тетраэдр AB_2C_2D, образованный плоскостями Π, ABD, ACD и плоскостью, проходящей через вершину A параллельно плоскости BCD (рис. 8.2).

Так как DC_1 — касательная к описанной окружности треугольника DBC, то $\angle BDC_1 = \angle BCD$. Кроме того, $BC_1 \parallel CD$, поэтому $\angle C_1BD = \angle BDC$. Следовательно, $\Delta DC_1B \sim \Delta CBD$, а значит, $DC_1 : DB = CB : CD$, т. е. $DC_1 = \dfrac{a'b}{c}$. Аналогично $DA_1 = \dfrac{c'b}{a}$, $DC_2 = \dfrac{b'a}{c}$ и $DB_2 = \dfrac{c'a}{b}$. А так как $\Delta A_1C_1D \sim \Delta DC_2B_2$, то $A_1C_1 : A_1D = DC_2 : DB_2$, т. е. $A_1C_1 = \dfrac{b'b^2}{ac}$.

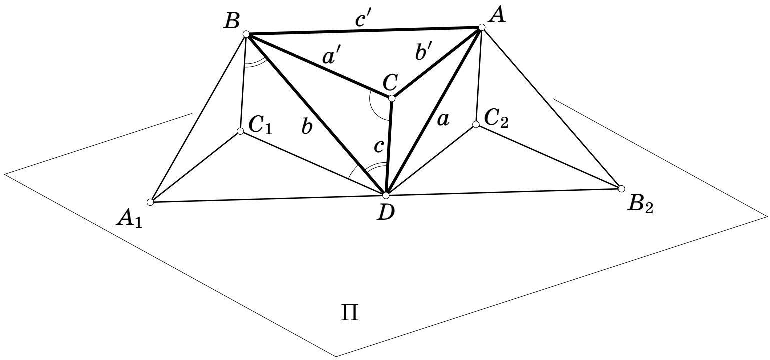


Рис. 8.2

Итак, длины сторон треугольника A_1C_1D, домноженные на $\frac{ac}{b}$, равны $a'a$, $b'b$ и $c'c$, а значит,

$$S_{A_1C_1D} = \frac{b^2}{a^2c^2}S.$$

Вычислим теперь объём тетраэдра A_1BC_1D. Рассмотрим для этого диаметр DM описанной сферы исходного тетраэдра и перпендикуляр BK, опущенный на плоскость A_1C_1D. Ясно, что $BK \perp DK$ и $DM \perp DK$. Опустим из середины O отрезка DM перпендикуляр OL на отрезок DB. Так как $\triangle BDK \sim \triangle DOL$, то $BK : BD = DL : DO$, т. е. $BK = \frac{b^2}{2R}$. Поэтому

$$V_{A_1BC_1D} = \frac{1}{3}BK \cdot S_{A_1C_1D} = \frac{b^4}{6Ra^2c^2S}.$$

Отношение объёмов тетраэдров A_1BC_1D и $ABCD$ равно произведению отношения площадей граней BC_1D и BCD и отношения длин высот, опущенных на эти грани; последнее отношение равно $S_{A_1BD} : S_{ABD}$. Так как $\triangle DC_1B \sim \triangle CBD$, то $S_{BC_1D} : S_{BCD} = (DB : CD)^2 = b^2 : c^2$. Аналогично $S_{A_1BD} : S_{ABD} = b^2 : a^2$. Следовательно,

$$V = \frac{a^2c^2}{b^4}V_{A_1BC_1D} = \frac{a^2c^2}{b^4}\frac{b^4}{6Ra^2c^2}S = \frac{S}{6R}.$$

8.13. Пусть S_1 и S_2 — площади граней с общим ребром a, S_3 и S_4 — площади граней с общим ребром b. Пусть, далее, a, m и n — длины рёбер грани с площадью S_1; α, γ и δ — величины двугранных углов при этих рёбрах, h_1 — длина высоты, опущенной на эту грань; H — основание этой высоты; V — объём тетраэдра. Соединяя точку H с вершинами грани S_1, получаем три треугольника. Выражая площадь грани S_1 через площади этих треугольников, получаем

$$ah_1 \operatorname{ctg} \alpha + mh_1 \operatorname{ctg} \gamma + nh_1 \operatorname{ctg} \delta = 2S_1$$

(так как углы α, γ и δ изменяются от 0° до 180°, эта формула остаётся справедливой и в том случае, когда точка H лежит вне грани). Учитывая,

что $h_1 = \dfrac{3V}{S_1}$, получаем
$$a \operatorname{ctg} \alpha + m \operatorname{ctg} \gamma + n \operatorname{ctg} \delta = \frac{2S_1^2}{3V}.$$
Сложив такие равенства для граней S_1 и S_2 и вычтя из них равенства для остальных граней, получим
$$a \operatorname{ctg} \alpha \;\; b \operatorname{ctg} \beta = \frac{S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 - S_4^2}{3V}.$$
Возведём это равенство в квадрат, заменим $\operatorname{ctg}^2 \alpha$ и $\operatorname{ctg}^2 \beta$ на $\dfrac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$ и $\dfrac{1}{\sin^2 \beta} - 1$ и воспользуемся равенствами $\dfrac{a^2}{\sin^2 \alpha} = \dfrac{4S_1^2 S_2^2}{9V^2}$ и $\dfrac{b^2}{\sin^2 \beta} = \dfrac{4S_3^2 S_4^2}{9V^2}$ (см. задачу 3.3). В итоге получим
$$a^2 + b^2 + 2ab \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{2Q - T}{9V^2},$$
где Q — сумма квадратов попарных произведений площадей граней, T — сумма четвёртых степеней площадей граней.

8.14. Пусть V — объём тетраэдра; S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади его граней. Если расстояние от точки O до i-й грани равно h_i то $\dfrac{\sum \varepsilon_i h_i S_i}{3} = V$, где $\varepsilon_i = +1$, если точка O и тетраэдр лежат по одну сторону от i-й грани, и $\varepsilon_i = -1$ в противном случае. Следовательно, если r — радиус шара, касающегося всех плоскостей граней тетраэдра, то $(\sum \varepsilon_i S_i) \dfrac{r}{3} = V$, т.е. $\sum \varepsilon_i S_i > 0$. Обратно, если для данного набора $\varepsilon_i = \pm 1$ величина $\sum \varepsilon_i S_i$ положительна, то существует соответствующий шар. В самом деле, рассмотрим точку, для которой $h_1 = h_2 = r$, где $r = \dfrac{3V}{\sum \varepsilon_i S_i}$ (иными словами, мы рассматриваем точку пересечения трёх плоскостей). Для этой точки h_4 также равно r.

Для любого тетраэдра существует вписанный шар ($\varepsilon_i = 1$ при всех r). Кроме того, так как площадь любой грани меньше суммы площадей остальных граней (задача 15.29), то существуют четыре вневписанных шара, каждый из которых касается одной грани и продолжений трёх других граней (одно из чисел ε_i равно -1).

Ясно также, что если для некоторого набора $\varepsilon_i = \pm 1$ величина $\sum \varepsilon_i S_i$ положительна, то для набора с противоположными знаками она отрицательна. Так как всего наборов $2^4 = 16$, то шаров не более восьми. Ровно восемь их будет в том случае, когда сумма площадей любых двух граней не равна сумме площадей двух других граней.

8.15. Плоскость Π пересекает рёбра DA, DB, DC или их продолжения в точках A_1, B_1, C_1. Пусть точки A_2, B_2, C_2 симметричны этим точкам относительно середин соответствующих рёбер. Точки A_1, B_1, C_1 однозначно задают плоскость Π, поэтому достаточно доказать, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекают ребро AB в точках, симметричных относительно его середины (аналогичное утверждение для рёбер BC и AC доказывается аналогично). Требуемое утверждение легко следует из теоремы Менелая, применённой к треугольнику ABD и точкам на его сторонах.

8.16. Опустим из точки X перпендикуляры XA_1, XB_1, XC_1 и XD_1 на грани. Из точки O тоже опустим перпендикуляры OA_2, OB_2, OC_2 и OD_2 на грани. Ясно, что

$$\frac{XA'}{OA'}+\frac{XB'}{OB'}+\frac{XC'}{OC'}+\frac{XD'}{OD'}=\frac{XA_1}{OA_2}+\frac{XB_1}{OB_2}+\frac{XC_1}{OC_2}+\frac{XD_1}{OD_2}$$

и $OA_2=OB_2=OC_2=OD_2=x$. Остаётся доказать, что $XA_1+XB_1+XC_1+XD_1=4x$.

Сумма $XA_1+XB_1+XC_1+XD_1$ одна и та же для всех точек X внутри тетраэдра $ABCD$ (задача 3.24). Но если X совпадает с O, то эта сумма равна $4x$.

8.17. Если в тетраэдре $ABCD$ сумма длин рёбер AB и CD равна сумме длин рёбер BC и AD, то существует сфера, касающаяся этих четырёх ребер во внутренних точках (см. задачу 5.14). Пусть O — центр этой сферы. Заметим теперь, что если из точки X проведены касательные XP и XQ к сфере с центром O, то точки P и Q симметричны относительно плоскости, проходящей через прямую XO и середину отрезка PQ, а значит, плоскости POX и QOX образуют с плоскостью XPQ равные углы.

Проведём четыре плоскости, проходящие через точку O и рассматриваемые рёбра тетраэдра. Они разбивают каждый из рассматриваемых двугранных углов на два двугранных угла. Выше было показано, что полученные двугранные углы, прилегающие к одной грани тетраэдра, равны. Как в одну, так и в другую рассматриваемую сумму двугранных углов входит по одному полученному углу для каждой грани тетраэдра.

8.18. По условию $KLMN$ — квадрат. Проведём через точки K, L, M и N плоскости, касающиеся сферы. Так как все эти плоскости одинаково наклонены к плоскости $KLMN$, то они пересекаются в одной точке S, расположенной

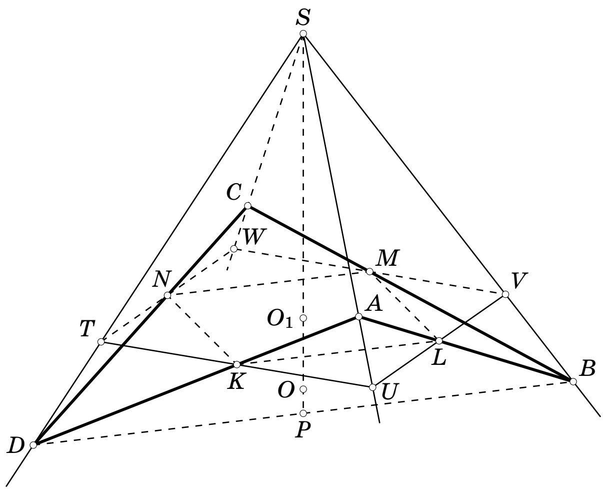


Рис. 8.3

на прямой OO_1, где O — центр сферы, а O_1 — центр квадрата. Эти плоскости пересекают плоскость квадрата $KLMN$ по квадрату $TUVW$, серединами сторон которого являются точки K, L, M и N (рис. 8.3). В четырёхгранном угле $STUVW$ с вершиной S все плоские углы равны, а точки K, L, M и N лежат на биссектрисах его плоских углов, причём $SK=SL=SM=SN$. Следовательно, $SA=SC$ и $SD=SB$, а значит, $AK=AL=CM=CN$ и $BL=BM=DN=DK$. По условию AC тоже касается шара, поэтому $AC=AK+CN=2AK$. А так как SK — биссектриса угла DSA, то $DK:KA=DS:SA=DB:AC$. Из равенства $AC=2AK$ следует теперь, что $DB=2DK$. Пусть P — середина отрезка DB; тогда P лежит на прямой SO. Треугольники DOK и DOP равны, так как $DK=DP$ и $\angle DKO=90^\circ=\angle DPO$. Поэтому $OP=OK=R$, где R — радиус сферы, а значит, DB тоже касается сферы.

8.19. а) Пусть $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $DA=a_1$, $DB=b_1$ и $DC=c_1$. Пусть, далее, G — точка пересечения медиан треугольника ABC, N — точка пересечения прямой DM с описанной сферой, K — точка пересечения прямой AG с описанной окружностью треугольника ABC. Докажем сначала, что $AG\cdot GK=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$. В самом деле, $AG\cdot GK=R^2-O_1G^2$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC, O_1 — её центр. Но $O_1G^2=R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$, (см. «Задачи по планиметрии», задача 14.22). Далее, $DG\cdot GN=AG\cdot GK=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$, а значит, $GN=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9m}$, где

$$m=DG=\frac{\sqrt{3(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-a^2-b^2-c^2}}{3} \qquad (1)$$

(см. задачу 8.2). Поэтому $DN=DG+GN=m+\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9m}=\dfrac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{3m}$.

Перпендикулярность прямых DM и OM эквивалентна равенству $DN=2DM$, т. е. $\dfrac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{3m}=\dfrac{3m}{2}$. Выражая m по формуле (1), получаем требуемое.

б) Воспользуемся обозначениями задачи (а) и её результатами. Пусть $x=a_1^2+b_1^2+c_1^2$ и $y=a^2+b^2+c^2$. Требуется проверить, что $x=y$. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения медиан треугольников DBC, DAC и DAB. При гомотетии с центром D и коэффициентом $\dfrac{3}{2}$ точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ переходит в точку пересечения медиан треугольника ABC. Поэтому M — точка пересечения продолжения медианы DX тетраэдра $A_1B_1C_1D$ с описанной сферой этого тетраэдра, а значит, для вычисления длины отрезка DM можно воспользоваться формулой для DN, полученной в задаче (а):

$$DM=\frac{DA_1^2+DB_1^2+DC_1^2}{3DX}.$$

Ясно, что $DX=\dfrac{2m}{3}$; выражая DA_1, DB_1 и DC_1 через медианы, а медианы через стороны, получаем $DA_1^2+DB_1^2+DC_1^2=\dfrac{4x-y}{9}$. Следовательно, $DM=\dfrac{4x-y}{18m}$.

С другой стороны, $DM = \frac{3m}{4}$, поэтому $2(4x-y) = 27m^2$. Согласно формуле (1) $9m^2 = 3x - y$, а значит, $2(4x-y) = 3(3x-y)$, т. е. $x = y$.

8.20. Первое решение. Пусть α, β и γ — углы между плоскостью ABC и плоскостями DBC, DAC и DAB. Если площадь грани ABC равна S, то согласно задаче 2.15 площади граней DBC, DAC и DAB равны $S\cos\alpha$, $S\cos\beta$ и $S\cos\gamma$. Остаётся проверить, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Углы α, β и γ равны углам между прямой, перпендикулярной плоскости ABC, и прямыми DA, DB и DC. Поэтому требуемое утверждение следует из задачи 1.23.

Второе решение. Пусть D' — проекция точки D на плоскость ABC. Согласно задаче 2.15 имеем $S_{DBC} = S_{ABC}\cos\alpha$ и $S_{D'BC} = S_{DBC}\cos\alpha$, где α — угол между плоскостями ABC и DBC. Следовательно, $S_{D'BC} = \frac{S_{DBC}^2}{S_{ABC}}$. Запишем аналогичные равенства для $S_{D'AC}$ и $S_{D'AB}$ и сложим все три равенства. Учитывая, что $S_{D'BC} + S_{D'AC} + S_{D'AB} = S_{ABC}$, получаем требуемое.

8.21. Пусть $CD = a$. Тогда $AC = \frac{a}{\sin\alpha}$, $BC = \frac{a}{\sin\beta}$ и $AB = a\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta}$. Учитывая, что $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cos\varphi$, получаем требуемое.

8.22. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, рёбра AB, AD и AA_1 которого являются рёбрами данного тетраэдра. Отрезок, соединяющий середины рёбер AB и A_1D, является средней линией треугольника ABD_1 (параллельной BD_1); следовательно, его длина равна $\frac{d}{2}$, где d — длина диагонали параллелепипеда.

8.23. Так как $S_{ABC}^2 = S_{ABD}^2 + S_{BCD}^2 + S_{ACD}^2$ (см. задачу 8.20), то

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{2}.$$

Следовательно, объём тетраэдра равен $\frac{h\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{6}$. С другой стороны, он равен $\frac{abc}{6}$. Приравнивая эти выражения, получаем требуемое.

8.24. Возьмём на лучах AC и AD точки P и R так, что $AP = AR = AB$, и рассмотрим квадрат $APQR$. Ясно, что $\triangle ABC = \triangle RQD$ и $\triangle ABD = \triangle PQC$, а значит, $\triangle BCD = \triangle QDC$. Таким образом, сумма плоских углов при вершине B равна $\angle PQC + \angle CQD + \angle DQR = \angle PQR = 90^\circ$.

8.25. Для каждого ребра тетраэдра существует лишь одно несмежное с ним ребро, поэтому среди любых трёх ребер найдутся два смежных. Заметим теперь, что прямыми не могут быть три двугранных угла при рёбрах одной грани. Следовательно, возможны два варианта расположения трёх ребер, двугранные углы при которых прямые: 1) эти рёбра выходят из одной вершины; 2) два ребра выходят из концов одного ребра. В первом случае достаточно воспользоваться результатами задачи 6.3. Рассмотрим второй случай: двугранные углы при рёбрах AB, BC и CD прямые. Тогда плоскости ABD и BCD перпендикулярны плоскости ABC, поэтому $BD \perp ABC$. Аналогично $AC \perp BCD$. Поэтому тетраэдр $ABCD$ выглядит следующим образом: в треугольниках ABC и BCD

углы ACB и CBD прямые, и угол между плоскостями этих треугольников тоже прямой. В этом случае углы ACB, ACD, ABD и CBD прямые.

8.26. Согласно решению задачи 8.25 возможны два варианта.

1. Все плоские углы при одной вершине тетраэдра прямые. Но в этом случае длины всех отрезков, соединяющих середины противоположных рёбер, равны (задача 8.22).

2. Двугранные углы при рёбрах AB, BC и CD прямые. В этом случае рёбра AC и BD перпендикулярны граням CBD и ABC соответственно. Пусть $AC=2x$, $BC=2y$ и $BD=2z$. Тогда длина отрезка, соединяющего середины рёбер AB и CD, и отрезка, соединяющего середины рёбер BC и AD, равна $\sqrt{x^2+z^2}$, а длина отрезка, соединяющего середины рёбер AC и BD, равна $\sqrt{x^2+4y^2+z^2}$. Поэтому $x^2+z^2=a^2$ и $x^2+4y^2+z^2=b^2$. Наибольшим ребром тетраэдра $ABCD$ является ребро AD; квадрат его длины равен $4(x^2+y^2+z^2)=b^2+3a^2$.

8.27. Как следует из решения задачи 8.25, можно считать, что вершинами данного тетраэдра являются вершины A, B, D и D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть α — искомый угол; $AB=a$, $AD=b$ и $DD_1=c$. Тогда $a=b\operatorname{tg}\alpha$ и $c=b\operatorname{tg}\alpha$. Косинус угла между плоскостями BB_1D и ABC_1 равен

$$\frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin^2\alpha$$

(см. задачу 11.8). Следовательно, $\cos\alpha=\sin^2\alpha=1\cos^2\alpha$, т.е. $\cos\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Так как $1+\sqrt{5}>2$, окончательно получаем $\alpha=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

8.28. Предположим сначала, что тетраэдр $ABCD$ равногранный. Тогда у трёхгранных углов $ABCD$ и $DCBA$ равны соответственные плоские углы, а потому равны соответственные двугранные углы.

Предположим теперь, что в тетраэдре $ABCD$ попарно равны противолежащие двугранные углы. Тогда у трёхгранных углов $ABCD$ и $DCBA$ равны соответственные двугранные углы, а потому равны соответственные плоские углы (задача 6.4). Треугольники ABD и DCA являются подобными треугольниками с общей стороной AD, поэтому они равны. Равенство рёбер AD и BC доказывается аналогично.

8.29. Ясно, что если тетраэдр равногранный, то все его трёхгранные углы равны. Докажем, что если величины всех телесных углов трёхгранных углов тетраэдра равны, то он равногранный. Согласно задаче 7.30 (б) величина телесного угла трёхгранного угла равна $\alpha+\beta+\gamma-\pi$, где α, β и γ — его двугранные углы. Пусть α_{ij} — величина двугранного угла при ребре A_iA_j данного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. По условию

$$\begin{aligned}
\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{14}-\pi &= \alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{24}-\pi,\\
\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{14}-\pi &= \alpha_{13}+\alpha_{23}+\alpha_{34}-\pi,\\
\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{14}-\pi &= \alpha_{14}+\alpha_{24}+\alpha_{34}-\pi.
\end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых получаем

$$\alpha_{13}+\alpha_{14} = \alpha_{23}+\alpha_{24},$$
$$\alpha_{12}+\alpha_{14} = \alpha_{23}+\alpha_{34},$$
$$\alpha_{12}+\alpha_{13} = \alpha_{24}+\alpha_{34}.$$

Из этих равенств следует, что $\alpha_{12}=\alpha_{34}$, $\alpha_{13}=\alpha_{24}$ и $\alpha_{14}=\alpha_{23}$, т. е. в рассматриваемом тетраэдре попарно равны противолежащие двугранные углы. Остаётся воспользоваться задачей 8.28.

8.30. Ответ: нет, не существует. Неравенство $8^2+10^2<13^2$ показывает, что треугольник ABC тупоугольный. Покажем, что если все грани тетраэдра $ABCD$ равны, то треугольник ABC должен быть остроугольным. Любому тетраэдру можно сопоставить параллелепипед, проведя через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Если исходный тетраэдр равногранный, то грани полученного параллелепипеда являются параллелограммами с равными диагоналями, т. е. прямоугольниками. Таким образом, равногранному тетраэдру соответствует прямоугольный параллелепипед. Если длины рёбер этого параллелепипеда равны a, b, c, то квадраты длин рёбер исходного тетраэдра равны a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+a^2. Неравенства $(a^2+b^2)+(b^2+c^2)>c^2+a^2$ и т. п. показывают, что грани исходного тетраэдра являются остроугольными треугольниками.

8.31. а) Пусть $AB=CD$, $AC=BD$ и сумма плоских углов при вершине A равна 180°. Докажем, что $AD=BC$. Для этого достаточно проверить, что $\angle ACD=\angle BAC$. Но как сумма углов треугольника ACD, так и сумма плоских углов при вершине A равны 180°; кроме того, $\angle DAB=\angle ADC$, так как $\Delta DAB=\Delta ADC$.

б) Пусть O_1 и O_2 — точки касания вписанной сферы с гранями ABC и BCD. Тогда $\Delta O_1BC=\Delta O_2BC$. Из условия задачи следует, что O_1 и O_2 — центры описанных окружностей указанных граней. Поэтому $\angle BAC=\dfrac{\angle BO_1C}{2}=\dfrac{\angle BO_2C}{2}=$ $=\angle BDC$. Аналогичные рассуждения показывают, что каждый из плоских углов при вершине D равен соответствующему углу треугольника ABC, а значит, их сумма равна 180°. Это утверждение справедливо для всех вершин тетраэдра. Остаётся воспользоваться результатом задачи 2.34 (а).

в) Углы ADB и ACB опираются на равные хорды в равных окружностях, поэтому они равны или составляют в сумме 180°. Предположим сначала, что для каждой пары углов граней тетраэдра, опирающихся на одно ребро, имеет место равенство углов. Тогда, например, сумма плоских углов при вершине D равна сумме углов треугольника ABC, т. е. равна 180°. Сумма плоских углов при любой вершине тетраэдра равна 180°, поэтому он равногранный (см. задачу 2.34 (а)).

Докажем теперь, что случай, когда углы ADB и ACB не равны, невозможен. Предположим, что $\angle ADB+\angle ACB=180^\circ$ и $\angle ADB\neq\angle ACB$. Пусть для определённости угол ADB тупой. Поверхность тетраэдра $ABCD$ можно так «развернуть» на плоскость ABC, что образы D_a, D_b и D_c точки D попадут на описанную окружность треугольника ABC; при этом направление поворота боковой грани вокруг ребра основания выбирается в соответствии с тем, равны ли углы, опирающиеся на это ребро, или же они составляют в сумме 180°.

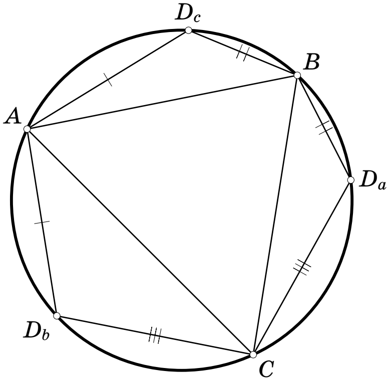


Рис. 8.4

В процессе разворачивания точка D движется по окружностям, плоскости которых перпендикулярны прямым AB, BC и CA. Эти окружности лежат в разных плоскостях, поэтому любые две из них имеют не более двух общих точек. Но две общие точки есть у каждой пары этих окружностей: точка D и точка, симметричная ей относительно плоскости ABC. Следовательно, точки D_a, D_b и D_c попарно различны. Кроме того, $AD_b = AD_c$, $BD_a = BD_c$ и $CD_a = CD_b$. Развёртка выглядит следующим образом: в окружность вписан треугольник AD_cB с тупым углом D_c; из точек A и B проведены хорды AD_b и BD_a, равные AD_c и BD_c соответственно; C — середина одной из двух дуг, заданных точками D_a и D_b. Одна из середин этих двух дуг симметрична точке D_c относительно прямой, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему; эта точка нам не подходит. Искомая развёртка изображена на рис. 8.4. Углы при вершинах D_a, D_b и D_c шестиугольника $AD_cD_aCD_b$ дополняют до 180° углы треугольника ABC, поэтому их сумма равна 360°. Но эти углы равны плоским углам при вершине D тетраэдра $ABCD$, поэтому их сумма меньше 360°. Получено противоречие.

г) Пусть K и L — середины рёбер AB и CD, O — центр масс тетраэдра, т. е. середина отрезка KL. Так как O — центр описанной сферы тетраэдра, то треугольники AOB и COD равнобедренные, с равными боковыми сторонами и равными медианами OK и OL. Поэтому $\triangle AOB = \triangle COD$, а значит, $AB = CD$. Аналогично доказывается равенство других пар противоположных рёбер.

8.32. Трёхгранные углы при вершинах A и C имеют равные двугранные углы, поэтому они равны (задача 6.4). Следовательно, равны их плоские углы, а значит, $\triangle ABC = \triangle CDA$.

8.33. Центр масс тетраэдра лежит на прямой, соединяющей середины рёбер AB и CD. Следовательно, на этой прямой лежит центр описанной сферы тетраэдра, а значит, указанная прямая перпендикулярна рёбрам AB и CD. Пусть C' и D' — проекции точек C и D на плоскость, проходящую через прямую AB параллельно CD. Так как $AC'BD'$ — параллелограмм, то $AC = BD$ и $AD = BC$.

8.34. Пусть K и L — середины рёбер AB и CD. Центр тетраэдра лежит на прямой KL, поэтому центр вписанной сферы также лежит на прямой KL. Следовательно, при проекции на плоскость, перпендикулярную CD, отрезок KL переходит в биссектрису треугольника, являющегося проекцией грани ABC. Ясно также, что проекция точки K является серединой проекции отрезка

AB. Поэтому проекции отрезков KL и AB перпендикулярны, а значит, плоскость KDC перпендикулярна плоскости Π, проходящей через ребро AB параллельно CD. Аналогично плоскость LAB перпендикулярна Π. Следовательно, прямая KL перпендикулярна Π. Пусть C' и D' — проекции точек C и D на плоскость Π. Так как $AC'BD'$ — параллелограмм, то $AC=BD$ и $AD=BC$.

8.35. Пусть S — середина ребра BC; K, L, M и N — середины рёбер AB, AC, DC и DB. Тогда $SKLMN$ — четырёхгранный угол с равными плоскими углами, а его сечение $KLMN$ — параллелограмм. С одной стороны, четырёхгранный угол с равными плоскими углами имеет сечение — ромб (задача 6.21 (б)); с другой стороны, любые два сечения четырёхгранного угла, являющиеся параллелограммами, параллельны (задача 6.21 (а)). Поэтому $KLMN$ — ромб; кроме того, из решения задачи 6.21 (б) следует, что $SK=SM$ и $SL=SN$. Это означает, что $AB=DC$ и $AC=DB$. Следовательно, $\triangle BAC=\triangle ABD$ и $BC=AD$.

8.36. Точка касания вневписанной сферы с гранью ABC совпадает с проекцией H точки O_d (центра сферы) на плоскость ABC. Так как трёхгранный угол O_dABC прямой, то H — точка пересечения высот треугольника ABC (см. задачу 2.13).

Пусть O — точка касания вписанной сферы с гранью ABC. Из результата задачи 6.17 (б) следует, что прямые, соединяющие точки O и H с вершинами треугольника ABC, симметричны относительно его биссектрис. Нетрудно доказать, что это означает, что O — центр описанной окружности треугольника ABC (доказательство достаточно провести для остроугольного треугольника, так как точка H принадлежит грани). Таким образом, точка касания вписанной сферы с гранью ABC совпадает с центром описанной окружности этой грани; для остальных граней доказательство этого проводится аналогично. Остаётся воспользоваться результатом задачи 8.31 (б).

8.37. Проведём через прямую AB плоскость, параллельную прямой CD. Пусть C' и D' — проекции точек C и D на эту плоскость. Покажем, что прямая AB делит отрезок $C'D'$ пополам. Действительно, проекция тетраэдра $ABCD$ на плоскость, перпендикулярную прямой AB, представляет собой равнобедренный треугольник, поскольку две его стороны равны высотам (равновеликих) треугольников ACB и ADC, опущенных из вершин C и D на сторону AB. Аналогично доказывается, что прямая CD делит пополам проекцию ребра AB на плоскость, проходящую через прямую CD параллельно прямой AB. Таким образом, $AC'BD'$ — параллелограмм. Из равенства $BC'=AD'$ следует равенство $BC=AD$. Равенства длин остальных пар противоположных рёбер доказываются аналогично.

8.38. Достроим данный тетраэдр до прямоугольного параллелепипеда (см. задачу 8.58 (а)); пусть x, y и z — рёбра этого параллелепипеда. Тогда $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=b^2$ и $z^2+x^2=c^2$. Так как $R=\frac{d}{2}$, где d — диагональ параллелепипеда, а $d^2=x^2+y^2+z^2$, то

$$R^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2}{8}.$$

Складывая равенства $x^2+y^2=a^2$ и $z^2+x^2=c^2$ и вычитая из них равенство $y^2+z^2=b^2$, получаем $x^2=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}$. Аналогично находим y^2 и z^2. Так как объём тетраэдра в три раза меньше объёма параллелепипеда (см. решение задачи 3.4), то

$$V^2=\frac{(xyz)^2}{9}=\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{72}.$$

8.39. Достроим данный тетраэдр до прямоугольного параллелепипеда (см. задачу 8.58 (а)). Точка пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов тетраэдра (т. е. центр вписанного шара) совпадает с центром O параллелепипеда. Рассматривая проекции на плоскости, перпендикулярные рёбрам тетраэдра, легко проверить, что грани тетраэдра удалены от вершин параллелепипеда, отличных от вершин тетраэдра, вдвое больше, чем от точки O. Следовательно, эти вершины являются центрами вневписанных шаров. Этим доказаны оба утверждения.

8.40. Достроим данный тетраэдр до прямоугольного параллелепипеда. Пусть AA_1 — его диагональ, O — его центр. Точка H_1 является проекцией точки A_1 на грань BCD (см. задачу 2.13), а центр O_1 описанной окружности треугольника BCD — проекцией точки O. Так как O — середина отрезка AA_1, точки H и H_1 симметричны относительно O_1.

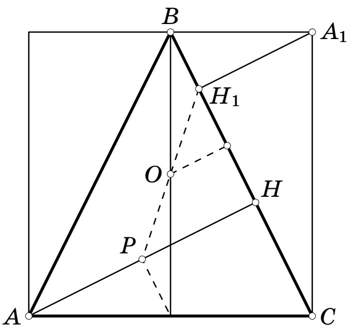


Рис. 8.5

Рассмотрим проекцию параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную BD (рис. 8.5; в дальнейшем решении используются обозначения этого рисунка, а не обозначения в пространстве). Высота CC' треугольника BCD параллельна плоскости проекции, поэтому длины отрезков BH_1 и CH_1 равны h_1 и h_2; длины отрезков AH и A_1H_1 при проецировании не изменились. Так как $AH : A_1H_1 = AC : A_1B = 2$ и $A_1H_1 : BH_1 = CH_1 : A_1H_1$, то $AH^2 = 4H_1A_1^2 = 4h_1h_2$.

8.41. Воспользуемся решением предыдущей задачи и обозначениями рис. 8.5; на этом рисунке P — середина высоты. Легко проверить, что $OH = OH_1 = OP = \sqrt{r^2+a^2}$, где r — расстояние от точки O до грани, a — расстояние между центром описанной окружности и точкой пересечения высот грани.

8.42. а) Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ — единичные векторы, перпендикулярные граням и направленные во внешнюю сторону. Так как площади всех граней равны, то $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4=0$ (см. задачу 11.30). Следовательно, $0=|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4|^2=4+2\sum(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$. Остаётся заметить, что скалярное произведение $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ равно $-\cos\varphi_{ij}$, где φ_{ij} — двугранный угол между гранями с номерами i и j.

б) Возьмём на одном ребре данного трёхгранного угла с вершиной S произвольную точку A и проведём из неё отрезки AB и AC до пересечения с другими рёбрами так, что $\angle SAB = \angle ASC$ и $\angle SAC = \angle ASB$. Тогда $\Delta SCA = \Delta ABS$.

Так как сумма углов треугольника ACS равна сумме плоских углов при вершине S, то $\angle SCA = \angle CSB$. Следовательно, $\Delta SCA = \Delta CSB$, а значит, тетраэдр $ABCS$ равногранный. Согласно задаче (а) сумма косинусов двугранных углов при рёбрах этого тетраэдра равна 2, а эта сумма в два раза больше суммы косинусов двугранных углов данного трёхгранного угла.

8.43. а) Пусть $AD \perp BC$. Тогда существует плоскость Π, проходящая через BC и перпендикулярная AD. Высота, опущенная из вершины B, перпендикулярна AD, поэтому она лежит в плоскости Π. Аналогично высота, опущенная из вершины C, лежит в плоскости Π. Следовательно, эти две высоты пересекаются в одной точке H, через которую проходит и третья высота. Она проходит через точку прямой AD и перпендикулярна прямой BC. Поэтому точка H принадлежит также и плоскости Π', проходящей через AD и перпендикулярной BC. Остаётся заметить, что плоскости Π и Π' пересекаются по общему перпендикуляру к AD и BC.

б) Пусть высоты BB' и CC' пересекаются в одной точке. Каждая из высот BB' и CC' перпендикулярна AD. Поэтому плоскость, содержащая эти высоты, перпендикулярна AD, а значит, $BC \perp AD$.

в) Пусть две пары противоположных рёбер тетраэдра перпендикулярны. Тогда третья пара противоположных рёбер тоже перпендикулярна (задача 11.10).

Следовательно, высоты тетраэдра попарно пересекаются. Если несколько прямых попарно пересекаются, то они лежат в одной плоскости или проходят через одну точку. В одной плоскости высоты тетраэдра лежать не могут, так как иначе в одной плоскости лежали бы и его вершины; поэтому они пересекаются в одной точке.

8.44. Из решения задачи 8.43 (а) следует, что точка пересечения высот принадлежит каждому общему перпендикуляру к противоположным парам рёбер.

8.45. а) Четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, стороны которого параллельны AC и BD. Его диагонали KM и LN равны тогда и только тогда, когда он является прямоугольником, т. е. $AC \perp BD$.

Отметим также, что плоскость $KLMN$ перпендикулярна общему перпендикуляру к AC и BD и делит его пополам.

б) Следует из результатов задач 8.45 (а) и 8.43 (в).

8.46. а) Так как $BC \perp AD$, то существует плоскость Π, проходящая через прямую AD и перпендикулярная BC; пусть U — точка пересечения прямой BC с плоскостью Π. Тогда AU и DU — перпендикуляры, опущенные из точек A и D на прямую BC.

б) Пусть AU и DU — высоты треугольников ABC и DBC. Тогда прямая BC перпендикулярна плоскости ADU, а значит, $BC \perp AD$.

8.47. а) Следует из задачи 11.11.

б) Воспользовавшись результатами задач 8.9 и 8.13, получаем, что произведения косинусов противоположных двугранных углов равны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов противоположных рёбер.

в) Достаточно проверить, что если все углы между противоположными рёбрами равны α, то $\alpha = 90^\circ$. Предположим, что $\alpha \neq 90^\circ$, т. е. $\cos\alpha \neq 0$. Пусть a, b и c — произведения длин пар противоположных рёбер. Одно из чисел $a\cos\alpha$, $b\cos\alpha$ и $c\cos\alpha$ равно сумме двух других (задача 8.61). Так как $\cos\alpha \neq 0$, то одно из чисел a, b и c равно сумме двух других. С другой стороны, существует треугольник, длины сторон которого равны a, b и c (задача 8.12). Получено противоречие.

8.48. а) Если $ABCD$ — ортоцентрический тетраэдр, то $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$ (см. задачу 8.47 (а)). Поэтому $AB^2+AC^2-BC^2=AD^2+AC^2-CD^2$, т. е. косинусы углов BAC и DAC имеют один знак.

б) Так как в треугольнике не может быть двух не острых углов, то учитывая результат задачи (а), получаем, что если $\angle BAC \geqslant 90^\circ$, то треугольник BCD остроугольный.

8.49. Пусть K и L — середины рёбер AB и CD. Точка H лежит в плоскости, проходящей через CD перпендикулярно AB, а точка O — в плоскости, проходящей через K перпендикулярно AB. Эти плоскости симметричны относительно центра масс M тетраэдра — середины отрезка KL. Рассматривая такие плоскости для всех рёбер, получаем, что точки H и O симметричны относительно M, а значит, $KHLO$ — параллелограмм. Квадраты его сторон равны $R^2-\dfrac{AB^2}{4}$ и $R^2-\dfrac{CD^2}{4}$, поэтому

$$OH^2 = 2\left(R^2-\frac{AB^2}{4}\right)+2\left(R^2-\frac{CD^2}{4}\right)-d^2 = 4R^2-\frac{AB^2+CD^2}{2}-d^2.$$

Рассматривая сечение, проходящее через точку M параллельно AB и CD, получаем, что $AB^2+CD^2=4d^2$.

8.50. а) Окружности 9 точек треугольников ABC и DBC принадлежат одной сфере тогда и только тогда, когда основания высот, опущенных из вершин A и D на прямую BC, совпадают. Остаётся воспользоваться результатом задачи 8.46 (б).

б) Отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, пересекаются в одной точке, делящей их пополам, — центре масс; кроме того, для ортоцентрического тетраэдра их длины равны (задача 8.45 (б)). Следовательно, все окружности 9 точек граней тетраэдра принадлежат сфере с диаметром, равным длине отрезка, соединяющего середины противоположных рёбер, и центром в центре масс тетраэдра.

в) Обе эти сферы проходят через середины рёбер AB, DC и CA, а эти точки лежат в указанной плоскости.

8.51. Пусть O, M и H — центр описанной сферы, центр масс и точка пересечения высот ортоцентрического тетраэдра. Из решения задачи 8.49 следует, что M — середина отрезка OH. Центры масс граней тетраэдра являются вершинами тетраэдра, гомотетичного данному с центром гомотетии M и коэффициентом $-\dfrac{1}{3}$. При этой гомотетии точка O переходит в точку O_1, лежащую на отрезке MH, причём $MO_1=\dfrac{MO}{3}$. Следовательно, $HO_1=\dfrac{HO}{3}$, т. е. точка O

переходит в O_1 при гомотетии с центром H и коэффициентом $\dfrac{1}{3}$. При этой гомотетии вершины тетраэдра переходят в указанные точки на высотах тетраэдра. Итак, 8 из 12 данных точек лежат на сфере радиуса $\dfrac{R}{3}$ с центром O_1 (R — радиус описанной сферы тетраэдра). Остаётся доказать, что на той же сфере лежат точки пересечения высот граней. Пусть O', H' и M' — центр описанной окружности, точка пересечения высот и центр масс какой-либо грани (рис. 8.6). Точка M' делит отрезок $O'H'$ в отношении $O'M' : M'H' = 1:2$ («Задачи по планиметрии», задача 5.128). Теперь легко вычислить, что проекция точки O_1 на плоскость этой грани совпадает с серединой отрезка $M'H'$, а значит, точка O_1 равноудалена от M' и H'.

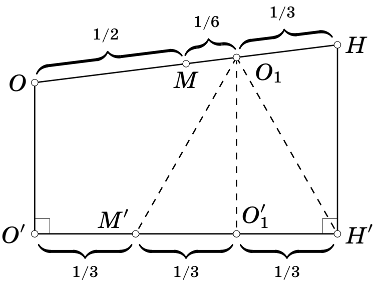


Рис. 8.6

8.52. а) Из решения задачи 8.51 следует, что при гомотетии с центром M и коэффициентом 3 точка M' переходит в точку описанной сферы тетраэдра.

б) Из решения задачи 8.51 следует, что при гомотетии с центром M и коэффициентом -3 точка H' переходит в точку описанной сферы тетраэдра.

8.53. Так как $AB \perp CD$, то существует плоскость, проходящая через AB и перпендикулярная CD. В этой плоскости лежат как точка пересечения высот, опущенных из вершин A и B, так и точка Монжа. Если провести такие плоскости через все рёбра, то они будут иметь единственную общую точку.

8.54. Докажем сначала, что у каркасного тетраэдра суммы длин пар противоположных рёбер равны. Пусть P, Q, R и S — точки касания сферы с рёбрами AB, BC, CD и DA. Тогда

$$AB + CD = AP + PB + CR + RD = AS + BQ + CQ + SD = AD + BC.$$

Аналогично доказывается, что $AB + CD = AC + BD$.

Докажем теперь, что если суммы длин пар противоположных рёбер равны, то окружности, вписанные в грани, попарно касаются. Пусть окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются ребра AB в точках C' и D' соответственно. Тогда

$$BC' = \frac{AB + BC - AC}{2} \quad \text{и} \quad BD' = \frac{AB + BD - AD}{2},$$

поэтому из равенства $AD + BC = AC + BD$ следует, что $BC' = BD'$, т.е. обе окружности касаются ребра AC в одной и той же точке. Для остальных рёбер доказательство аналогично.

Докажем затем, что если окружности, вписанные в грани, попарно касаются, то перпендикуляры к плоскостям граней, восставленные из центров вписанных окружностей граней, пересекаются в одной точке. Пусть две вписанные окружности граней касаются общего ребра этих граней в одной и той же точке P, и пусть O_1 и O_2 — центры этих окружностей. Перпендикуляры к плоскостям граней, восставленные из точек O_1 и O_2, лежат в плоскости PO_1O_2, причём они не параллельны, поэтому они пересекаются. Аналогично доказывается, что все перпендикуляры к плоскостям граней, восставленные из центров вписанных окружностей граней, попарно пересекаются. Эти четыре прямые не лежат в одной плоскости, поэтому согласно задаче 1.1 они пересекаются в одной точке.

Наконец, докажем, что если перпендикуляры к плоскостям граней, восставленные из центров вписанных окружностей граней, пересекаются в одной точке O, то тетраэдр каркасный. Пусть O_1 и O_2 — центры двух вписанных окружностей граней, причём эти окружности касаются общего ребра этих граней в точках P_1 и P_2. Перпендикуляры к граням, восставленные из точек O_1 и O_2, лежат в плоскостях, проходящих через точки P_1 и P_2 перпендикулярно общему ребру, поэтому из того, что перпендикуляры пересекаются в одной точке, следует, что точки P_1 и P_2 совпадают. Следовательно, окружность с центром O и радиусом OP_1 содержит все вписанные окружности граней и касается всех рёбер.

8.55. Условие, что при развёртке на плоскость каждой пары граней с общим ребром получается описанный четырёхугольник, эквивалентно тому, что суммы длин пар противоположных рёбер тетраэдра равны.

8.56. Пусть O — центр сферы, касающейся всех рёбер тетраэдра, O_1 и O_2 — центры вписанных окружностей двух граней, причём эти окружности касаются общего ребра в точке P_{12}. Тогда двугранный угол при этом ребре равен $\angle O_1P_{12}O_2 = \angle O_1P_{12}O + \angle OP_{12}O_2$. Далее, угол $\angle O_1P_{12}O$ равен углу между образующей и плоскостью основания конуса с вершиной O, основанием которого служит вписанная окружность с центром O_1. Если мы построим все четыре таких конуса и рассмотрим для них углы между образующей и плоскостью основания, то сумма четырёх таких углов будет равна сумме двугранных углов для каждой пары противоположных рёбер.

8.57. Рассмотрим тетраэдр, в котором данные отрезки соединяют середины противоположных рёбер, и достроим его до параллелепипеда. Рёбра этого параллелепипеда параллельны данным отрезкам, а его грани проходят через их концы. Следовательно, этот параллелепипед однозначно определяется данными отрезками, а до одного и того же параллелепипеда достраиваются ровно два тетраэдра.

8.58. а) Диагоналями противоположных граней полученного параллелепипеда являются два противоположных ребра тетраэдра. Эти грани будут прямоугольниками тогда и только тогда, когда противоположные рёбра равны. Результат этой задачи используется при решении задач (б) и (в).

б) Достаточно заметить, что данные отрезки параллельны рёбрам параллелепипеда.

в) Достроим тетраэдр AB_1CD_1 до параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную прямой AC. Если центр вписанной сферы совпадает с центром масс, то плоскость ACA_1C_1 проходит через центр вписанной сферы, т. е. является биссекторной плоскостью двугранного угла при ребре AC. Следовательно, при проекции отрезок AA_1 переходит в биссектрису и медиану проекции треугольника AB_1D_1, а значит, ребро AA_1 перпендикулярно грани $ABCD$.

8.59. Достроим равногранный тетраэдр до параллелепипеда. Получим прямоугольный параллелепипед (задача 8.58 (а)). Если его рёбра равны a, b и c, то квадраты сторон грани тетраэдра равны a^2+b^2, b^2+c^2 и c^2+a^2. Так как сумма квадратов любых двух сторон больше квадрата третьей стороны, грань является остроугольным треугольником.

8.60. Достроим тетраэдр до параллелепипеда. Расстояния между серединами скрещивающихся рёбер тетраэдра равны длинам рёбер этого параллелепипеда. Остаётся воспользоваться тем, что если a и b — длины сторон параллелограмма, а d_1 и d_2 — длины его диагоналей, то $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$.

8.61. Достроим тетраэдр до параллелепипеда. Тогда a и a_1 — диагонали двух противоположных граней параллелепипеда. Пусть m и n — стороны этих граней, причём $m \geqslant n$. По теореме косинусов $4m^2=a^2+a_1^2+2aa_1\cos\alpha$ и $4n^2=$ $=a^2+a_1^2-2aa_1\cos\alpha$, поэтому $aa_1\cos\alpha=m^2-n^2$. Записав такие равенства для чисел $bb_1\cos\beta$ и $cc_1\cos\gamma$, получим требуемое.

8.62. Достроим тетраэдр $ABCD$ до параллелепипеда (рис. 8.7). Сечение этого параллелепипеда плоскостью Π является параллелограммом; точки M и N лежат на его сторонах, а прямая l проходит через середины двух других его сторон.

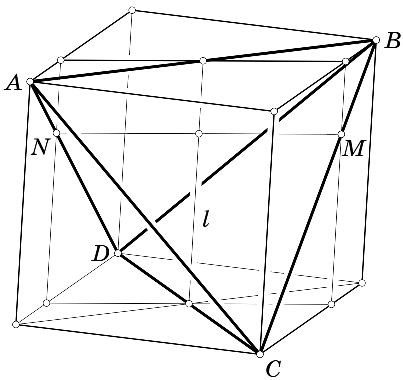


Рис. 8.7

8.63. Пусть AB_1CD_1 — тетраэдр, вписанный в куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; H — точка пересечения диагонали AC_1 с плоскостью B_1CD_1; M — середина отрезка AH, являющегося высотой тетраэдра. Так как $C_1H : HA = 1 : 2$ (задача 2.1), то точка M симметрична C_1 относительно плоскости B_1CD_1.

8.64. Пусть M — точка пересечения бимедиан тетраэдра (см. задачу 8.4). При симметрии относительно точки M рассматриваемые плоскости переходят в плоскости, проходящие через середины рёбер тетраэдра перпендикулярно этим рёбрам. Ясно, что такие плоскости проходят через центр O описанной сферы тетраэдра. Таким образом, точка Монжа Ω симметрична точке O относительно точки M (заметим, что точка M совпадает с центром масс тетраэдра).

8.65. Проведём через вершину D плоскость Π, параллельную плоскости ABC. Как видно из решения задачи 8.64, при симметрии относительно центра масс M точка Монжа Ω переходит в центр O описанной сферы. Учитывая, что точка M делит медиану тетраэдра, проведённую из вершины D, в отношении $3:1$, получаем, что точка Монжа Ω лежит в плоскости грани ABC тогда и только тогда, когда точка O равноудалена от плоскостей Π и ABC.

При ортогональной проекции на плоскость ABC сечение описанной сферы плоскостью Π (на нём лежит вершина D) переходит в окружность, концентрическую с сечением этой сферы плоскостью ABC (т. е. в окружность, концентрическую с описанной окружностью треугольника ABC). Эти концентрические окружности пересекаются тогда и только тогда, когда они совпадают, а совпадают они тогда и только тогда, когда точка O равноудалена от плоскостей Π и ABC.

8.66. а) Согласно задаче 8.65 проекция D_1 точки D на плоскость ABC лежит на описанной окружности треугольника ABC. Согласно теореме о трёх перпендикулярах основания высот треугольников DBC, DCA, DAB, опущенных из вершины D, — это проекции точки D_1 на стороны треугольника ABC (или их продолжения). Из того, что точка D_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC, следует, что указанные проекции лежат на одной прямой — прямой Симсона (см. «Задачи по планиметрии», задача 5.105).

б) Высота треугольника и диаметр его описанной окружности, проведённые из одной вершины, лежат на прямых, симметричных относительно биссектрисы треугольника (см. «Задачи по планиметрии», задача 2.1). Поэтому согласно задаче 6.32 (а) из того, что высоты, проведённые из вершины D, лежат в одной плоскости, следует, что диаметры, проведённые из вершины D, тоже лежат в одной плоскости.

8.67. Прежде всего заметим, что $\angle PP_\alpha P_\beta = \angle PAP_\beta$ и $\angle QQ_\beta Q_\alpha = \angle QAA_\alpha$. Поэтому равенства $\angle PAP_\beta = \angle QAA_\alpha$ и $\angle Q_\alpha P_\alpha P_\beta = \angle Q_\alpha Q_\beta P_\beta$ эквивалентны. Первое из этих равенств эквивалентно тому, что точка Q лежит на прямой, симметричной прямой AP относительно биссектрисы данного угла, а второе — тому, что точки P_α, Q_α, P_β и Q_β лежат на одной окружности. Отметим, что центром этой окружности является середина отрезка PQ.

8.68. Пусть P' — проекция точки P на плоскость $QQ_\alpha Q_\beta$, P'_α и P'_β — проекции точки P' на грани двугранного угла. Тогда точки P'_α, P'_β, Q_α и Q_β лежат на окружности с центром в середине отрезка $P'Q$ (задача 8.67). Аналогично мы определяем точки Q'_α и Q'_β и доказываем, что точки P_α, P_β, Q'_α и Q'_β лежат на окружности с центром в середине отрезка PQ'. Требуемое утверждение из этого легко следует.

8.69. Пусть плоскость $PP_\alpha P_\beta$ пересекает ребро двугранного угла в точке S. Точки P_α и P_β лежат на окружности с диаметром PS, поэтому $\angle SPP_\alpha = \angle SP_\beta P_\alpha$. Пусть Q' — основание высоты треугольника $SP_\alpha P_\beta$, проведённой из вершины S. Из равенства $\angle SPP_\alpha = \angle SP_\beta P_\alpha$ следует, что точки P и Q' изогонально сопряжены относительно данного двугранного угла. Поэтому точки Q и Q' и ребро двугранного угла лежат в одной плоскости, а значит, прямая $P_\alpha P_\beta$ перпендикулярна плоскости, проходящей через точку Q и ребро двугранного угла.

8.70. Множество точек, изогонально сопряжённых точке P относительно одного из двугранных углов данного трёхгранного угла, представляет собой плоскость, проходящую через вершину трёхгранного угла. Поэтому множество точек, изогонально сопряжённых точке P относительно двух двугранных углов, представляет собой прямую, проходящую через вершину трёхгранного угла. Таким образом, нужно доказать, что если точка Q изогонально сопряжена точке P относительно двух двугранных углов, то она изогонально сопряжена ей и относительно третьего двугранного угла.

Достаточно рассмотреть случай, когда точки P и Q лежат в плоскости, перпендикулярной общему ребру граней β и γ. Согласно задаче 8.68 точки P_α, P_β, P_γ, Q_α, Q_β и Q_γ лежат на сфере с центром в середине отрезка PQ. Поэтому точки P_β, P_γ, Q_β и Q_γ лежат на окружности с центром в середине отрезка PQ. Таким образом, согласно задаче 8.67 точки P и Q изогонально сопряжены относительно третьего двугранного угла.

Замечание. По поводу другого доказательства см. задачу 6.33 (б).

8.71. Согласно задаче 8.69 прямая SQ является пересечением трёх плоскостей, каждая из которых перпендикулярна плоскости $A'B'C'$, поэтому прямая SQ перпендикулярна плоскости $A'B'C'$.

8.72. Это непосредственно следует из задачи 8.68.

8.73. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно всех трёхгранных углов тетраэдра $ABCD$, поэтому требуемое утверждение непосредственно следует из задачи 8.71.

8.74. Согласно задаче 8.73 грани подерного тетраэдра точки O' перпендикулярны прямым, соединяющим центр описанной сферы с вершинами тетраэдра. Тем же самым прямым перпендикулярны и плоскости, касающиеся описанной сферы в вершинах тетраэдра. Поэтому согласно задаче 12.19 два рассматриваемых тетраэдра гомотетичны.

8.75. Уравнение $\dfrac{AX^2-BX^2}{AM^2-BM^2}=\dfrac{AX^2-CX^2}{AM^2-CM^2}$ можно переписать в виде

$$(AM^2-CM^2)AX^2+(BM^2-AM^2)BX^2+(CM^2-BM^2)CX^2=0.$$

Сумма коэффициентов при AX^2, BX^2, CX^2 равна нулю, поэтому согласно задаче 1.31 это уравнение задаёт плоскость, перпендикулярную плоскости ABC. Аналогично уравнение $\dfrac{AX^2-CX^2}{AM^2-CM^2}=\dfrac{AX^2-DX^2}{AM^2-DM^2}$ задаёт плоскость, перпендикулярную плоскости ACD. Две плоскости, заданные указанными уравнениями, пересекаются по некоторой прямой. Эта прямая, очевидно, содержит точки O и M (для точки O числители обращаются в нуль, а для точки M числители равны знаменателям).

8.76. а) Точка пересечения медиан M тетраэдра делит медиану в отношении $3:1$, считая от вершины (задача 8.1), поэтому при гомотетии с центром M и коэффициентом $-\dfrac{1}{3}$ вершина тетраэдра переходит в точку пересечения медиан противолежащей грани.

б) Пусть M_A — точка пересечения медиан грани BCD тетраэдра $ABCD$. Точка M является серединой отрезка $O\Omega$, и, кроме того, она делит медиану AM_A в отношении $3:1$. Пусть P — середина медианы AM_A, а M'_A — точка пересечения прямых ΩM_A и AO, где O — центр описанной сферы. Треугольники MPO и $MM_A\Omega$ равны, поэтому отрезок PO является средней линией треугольника $AM_AM'_A$. Следовательно, $AO = OM'_A$, а значит, при гомотетии с центром Ω и коэффициентом 3 точка M_A переходит в точку M'_A, лежащую на описанной сфере.

8.77. Согласно задаче 8.76 (б) точка A_1 лежит на сфере 12 точек. Кроме того, из решения этой задачи видно, что при гомотетии с центром Ω и коэффициентом 3 середина отрезка A_1M_A, где M_A — точка пересечения медиан грани BCD, переходит в центр описанной сферы. Поэтому A_1M_A — диаметр сферы 12 точек. Но $\angle A_1A_2M_A = 90^\circ$, поэтому точка A_2 лежит на сфере 12 точек.

8.78. Воспользуемся обозначениями из задачи 8.77. Длина отрезка A_1A_2 равна $\frac{1}{3}$ длины отрезка, высекаемого описанной сферой на высоте, опущенной на грань BCD. Кроме того, расстояние от центра сферы 12 точек до плоскости BCD равно $\frac{1}{2}$ длины отрезка A_1A_2.

8.79. Высота тетраэдра $ABCD$, проведённая из вершины D, касается описанной сферы тогда и только тогда, когда описанная сфера высекает на этой высоте отрезок длины 0. Согласно задаче 8.78 последнее условие эквивалентно тому, что центр сферы 12 точек лежит в плоскости ABC.

8.80. Воспользуемся аналогичным свойством пространственных четырёхугольников (задача 5.22). Тетраэдру $ABCD$ можно сопоставить три пространственных четырёхугольника: $ABCD$, $ABDC$ и $ADBC$. Из условия следует, что пары четырёхугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$, $ABDC$ и $A'B'D'C'$, $ADBC$ и $A'D'B'C'$ ортологические. Для каждой из трёх пар противоположных сторон тетраэдра $ABCD$ рассмотрим прямую, по которой пересекаются две плоскости, проведённые через середины сторон тетраэдра $A'B'C'D'$ перпендикулярно этим сторонам тетраэдра $ABCD$. Ортологичность пар четырёхугольников означает, что рассматриваемые прямые попарно пересекаются. Но эти прямые не лежат в одной плоскости (они перпендикулярны граням параллелепипеда, в который вписан тетраэдр $ABCD$), поэтому они пересекаются в одной точке.

8.81. Решение аналогично решению задачи 8.80; нужно только вместо задачи 5.22 воспользоваться задачей 5.23.

8.82. Пусть расстояния от точки X, лежащей внутри тетраэдра, до граней BCD, ACD, ABD, ABC равны α, β, γ, δ. Тогда

$$\alpha S_A + \beta S_B + \gamma S_C + \delta S_D = 3V,$$

где V — объём тетраэдра. Нас интересует точка, для которой величина $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ минимальна. Сначала мы покажем, что если существует точка X_0, для которой

$$\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 : \delta_0 = S_A : S_B : S_C : S_D,$$

то для неё величина $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ минимальна. Затем мы покажем, что точка с барицентрическими координатами $(S_A^2:S_B^2:S_C^2:S_D^2)$ обладает требуемым свойством.

Для произвольной точки X_1, лежащей внутри тетраэдра, выполняется равенство

$$(\alpha_1-\alpha_0)S_A+(\beta_1-\beta_0)S_B+(\gamma_1-\gamma_0)S_C+(\delta_1-\delta_0)S_D=0,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно равенству

$$(\alpha_1-\alpha_0)\alpha_0+(\beta_1-\beta_0)\beta_0+(\gamma_1-\gamma_0)\gamma_0+(\delta_1-\delta_0)\delta_0=0.$$

Из этого следует, что

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+\delta_1^2= \\ =\alpha_0^2+\beta_0^2+\gamma_0^2+\delta_0^2+(\alpha_1-\alpha_0)^2+(\beta_1-\beta_0)^2(\gamma_1-\gamma_0)^2+(\delta_1-\delta_0)^2.$$

Поэтому величина $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ будет минимальной именно для точки X_0.

Покажем теперь, что если точка X_0 имеет барицентрические координаты $(S_A^2:S_B^2:S_C^2:S_D^2)$, то

$$\alpha_0:\beta_0:\gamma_0:\delta_0=S_A:S_B:S_C:S_D,$$

Действительно, согласно задаче 18.25 имеем

$$V_{X_0BCD}:V_{X_0ACD}:V_{X_0ABD}:V_{X_0ABC}=S_A^2:S_B^2:S_C^2:S_D^2.$$

С другой стороны,

$$V_{X_0BCD}:V_{X_0ACD}:V_{X_0ABD}:V_{X_0ABC}=\alpha S_A:\beta S_B:\gamma S_C:\delta S_D.$$

8.83. Центр масс тетраэдра имеет барицентрические координаты $(1:1:1:1)$. Поэтому согласно задаче 18.29 изогонально сопряжённая точка имеет барицентрические координаты $(S_A^2:S_B^2:S_C^2:S_D^2)$. Но из решения задачи 8.82 видно, что именно такие барицентрические координаты имеет первая точка Лемуана.

8.84. Пусть $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $AD=a'$, $BD=b'$, $CD=c'$. Относительно треугольника ABC точка D_1 имеет трилинейные координаты $\left(\frac{1}{a'}:\frac{1}{b'}:\frac{1}{c'}\right)$, поэтому относительно этого треугольника она имеет барицентрические координаты $\left(\frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}:\frac{c}{c'}\right)$. Аналогично точка A_1 имеет барицентрические координаты $\left(\frac{a}{a'}:\frac{c'}{c}:\frac{b'}{b}\right)$ относительно треугольника DBC. Следовательно, прямые AD_1 и DA_1 делят отрезок BC в одном и том же отношении $\frac{c}{c'}:\frac{b}{b'}$. Таким образом, эти прямые лежат в одной плоскости, а потому пересекаются. Прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 попарно пересекаются и не лежат в одной плоскости, поэтому они пересекаются в одной точке.

8.85. Пусть $(\alpha:\beta:\gamma:\delta)$ — барицентрические координаты второй точки Лемуана. Согласно задаче 8.84

$$\alpha:\beta:\gamma=\frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}:\frac{c}{c'}=ab'c':bc'a':ca'b'.$$

и

$$\beta : \gamma : \delta = \frac{c'}{c} : \frac{b'}{b} : \frac{a}{a'} = bc'a' : ca'b' : abc.$$

Поэтому

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = ab'c' : bc'a' : ca'b' : abc.$$

8.86. При инверсии с центром D описанная сфера тетраэдра $ABCD$ переходит в плоскость, параллельную касательной плоскости в точке D. Поэтому можно считать, что вершины треугольника $A'B'C'$ получены из вершин треугольника ABC при инверсии с центром D и степенью R^2.

Пусть $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AD = a'$, $BD = b'$, $CD = c'$. Тогда $\frac{A'B'}{AB} = \frac{DA'}{DB}$, поэтому $A'B' = \frac{cR^2}{a'b'}$. Вычисляя аналогично остальные стороны треугольника $A'B'C'$, получаем $B'C' : C'A' : A'B' = aa' : bb' : cc'$.

Как видно из решения задачи 8.84, прямая CD_1 пересекает отрезок AB в такой точке C_2, что $AC_2 : C_2B = \frac{a}{a'} : \frac{b}{b'}$. Поскольку треугольники DAB и DB_1A_1 подобны, прямая DC_2 делит отрезок B_1A_1 в таком же отношении, в каком делит отрезок AB прямая, симметричная прямой DC_2 относительно биссектрисы угла ADB. Связь между отношениями, в которых делят сторону треугольника прямые, симметричные относительно биссектрисы противолежащего угла, легко находится с помощью теоремы синусов (подробности см. в задаче 5.149 из книги «Задачи по планиметрии»). В результате получаем, что если прямая DC_2 пересекает сторону $A'B'$ в точке C_3, то $\frac{A'C_3}{C_3B'} \cdot \frac{ab'}{ba'} = \frac{b'^2}{a'^2}$, т. е. $\frac{A'C_3}{C_3B'} = \frac{bb'}{aa'}$. Следовательно, $A'C_3$ — биссектриса треугольника $A'B'C'$. Ясно, что прямая DD_1 пересекает биссектрису $A'C_3$. Аналогично доказывается, что она пересекает остальные биссектрисы треугольника $A'B'C'$ (и при этом не лежит в плоскости $A'B'C'$).

ГЛАВА 9

ПИРАМИДА И ПРИЗМА

§ 1. Правильная пирамида

9.1. Дана правильная пирамида. Из произвольной точки P её основания восставлен перпендикуляр к плоскости основания. Докажите, что сумма отрезков от точки P до точек пересечения перпендикуляра с плоскостями граней пирамиды не зависит от выбора точки P на основании.

См. также задачи 2.12, 2.17, 11.12, 12.14, 17.5.

§ 2. Произвольная пирамида

9.2. Плоскости боковых граней треугольной пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы. Докажите, что проекция вершины на плоскость основания является центром вписанной или вневписанной окружности основания.

9.3. В треугольной пирамиде двугранные углы при рёбрах основания равны α. Найдите её объём, если длины рёбер основания равны a, b и c.

9.4. На основании треугольной пирамиды $SABC$ взята точка M, и через неё проведены прямые, параллельные рёбрам SA, SB и SC и пересекающие боковые грани в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что

$$\frac{MA_1}{SA} + \frac{MB_1}{SB} + \frac{MC_1}{SC} = 1.$$

9.5. Шар вписан в n-угольную пирамиду. Боковые грани пирамиды поворачиваются вокруг рёбер основания и кладутся в плоскость основания так, что они лежат по одну сторону от соответствующих рёбер вместе с основанием. Докажите, что вершины этих граней, отличные от вершин основания, лежат на одной окружности.

9.6. Из вершин основания вписанной пирамиды в боковых гранях проведены высоты. Докажите, что прямые, соединяющие основания высот в каждой грани, параллельны одной плоскости. (Плоские углы при вершине пирамиды не прямые.)

9.7. В основании пирамиды с вершиной S лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что её боковые рёбра образуют равные углы с некоторым лучом SO, лежащим внутри четырёхгранного угла $SABCD$, тогда и только тогда, когда $SA + SC = SB + SD$.

9.8. Параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ являются основаниями усечённой четырёхугольной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что любая прямая, пересекающая три из четырёх прямых AB_1, BC_1, CD_1 и DA_1, пересекает и четвёртую прямую или параллельна ей.

См. также задачи 2.3, 2.18, 2.35, 2.38, 3.30.

§ 3. Призма

9.9. Сонаправленные векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ перпендикулярны плоскости ABC, а их длины равны соответствующим высотам треугольника ABC, радиус вписанной окружности которого равен r.

а) Докажите, что расстояние от точки M пересечения плоскостей A_1BC, AB_1C и ABC_1 до плоскости ABC равно r.

б) Докажите, что расстояние от точки N пересечения плоскостей A_1B_1C, A_1BC_1 и AB_1C_1 до плоскости ABC равно $2r$.

9.10. Найдите площадь полной поверхности призмы, описанной около сферы, если площадь её основания равна S.

9.11. На боковых рёбрах BB_1 и CC_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты точки P и P_1 так, что

$$BP : PB_1 = C_1P_1 : P_1C = 1 : 2.$$

а) Докажите, что двугранные углы при рёбрах AP_1 и A_1P тетраэдра AA_1PP_1 прямые.

б) Докажите, что сумма двугранных углов при рёбрах AP, PP_1 и P_1A_1 тетраэдра AA_1PP_1 равна $180°$.

См. также задачи 16.15, 17.6, 18.11.

Решения

9.1. Пусть Π — плоскость основания пирамиды, Q — точка пересечения перпендикуляра к плоскости Π, восставленного из точки P, с плоскостью грани пирамиды, R — основание перпендикуляра, опущенного на ребро этой грани, лежащее в плоскости П. Тогда $PQ = PR\operatorname{tg}\varphi$, где $\varphi = \angle PRQ$. Угол φ — это угол наклона плоскости грани к плоскости основания. Для всех граней пирамиды он один и тот же. Поэтому нужно доказать, что для правильного многоугольника, лежащего в основании пирамиды, имеет место следующее утверждение: «Для любой точки P, лежащей внутри правильного многоугольника, сумма расстояний от P до сторон многоугольника одна и та же». Чтобы доказать это утверждение, разрежем правильный многоугольник на треугольники, проведя отрезки из точки P в вершины. С одной стороны, сумма площадей этих треугольников постоянна (она равна площади многоугольника). С другой стороны, она равна половине произведения суммы расстояний от точки P до сторон многоугольника на длину стороны правильного многоугольника.

9.2. Если α — угол между плоскостями боковых граней и плоскостью основания, а h — высота пирамиды, то расстояние от проекции вершины на плоскость основания до любой прямой, содержащей ребро основания, равно $h\operatorname{ctg}\alpha$.

Заметим также, что если равны двугранные углы при рёбрах основания, а не просто углы между плоскостями, то проекция вершины является центром именно вписанной окружности.

9.3. Пусть h — высота пирамиды, V — её объём, S — площадь основания. Согласно задаче 9.2 имеем $h = r\operatorname{tg}\alpha$, где r — радиус вписанной окружности основания. Следовательно, $V = \frac{Sh}{3} = \frac{Sr\operatorname{tg}\alpha}{3} = \frac{S^2\operatorname{tg}\alpha}{3p} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)\operatorname{tg}\alpha}{3}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$.

9.4. Пусть прямая AM пересекает BC в точке P. Тогда $MA_1 : SA = MP : AP = S_{MBC} : S_{ABC}$. Аналогично $MB_1 : SB = S_{AMC} : S_{ABC}$ и $MC_1 : SC = S_{ABM} : S_{ABC}$. Складывая эти равенства и учитывая, что $S_{MBC} + S_{AMC} + S_{ABM} = S_{ABC}$, получаем требуемое.

9.5. Если сфера касается сторон двугранного угла, то при совмещении этих сторон точки касания совпадают. Поэтому все точки касания боковых граней с вписанной сферой при повороте вокруг рёбер попадают в одну точку — точку касания сферы с плоскостью основания пирамиды. Расстояния от этой точки до вершин граней (после поворота) равны расстояниям от точек касания сферы с боковыми гранями до вершины пирамиды. Остаётся заметить, что длины всех касательных к сфере, проведённых из вершины пирамиды, равны.

9.6. Докажем, что все указанные прямые параллельны плоскости, касающейся описанной сферы пирамиды в её вершине. Для этого достаточно проверить, что если AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC, то прямая A_1B_1 параллельна прямой, касающейся описанной окружности треугольника в точке C. Так как $A_1C : B_1C = AC\cos C : BC\cos C = AC : BC$, то $\Delta A_1BC \sim \Delta ABC$. Поэтому $\angle CA_1B = \angle A$. Ясно также, что угол между касательной к описанной окружности в точке C и хордой BC равен $\angle A$.

9.7. Пусть $a = SA$, $b = SB$, $c = SC$, $d = SD$ и $\overrightarrow{SA} = a\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{SB} = b\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{SC} = c\boldsymbol{e}_3$, $\overrightarrow{SD} = d\boldsymbol{e}_4$. Условие, что $ABCD$ — параллелограмм, означает, что

$$-a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 = -d\boldsymbol{e}_4 + c\boldsymbol{e}_3. \tag{1}$$

Предположим сначала, что боковые рёбра образуют равные углы с лучом SO, лежащим внутри четырёхгранного угла $SABCD$. Пусть $\boldsymbol{m} = \overrightarrow{SO}$. Тогда $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{e}_4)$, поэтому, умножая скалярно обе части равенства (1) на вектор $\boldsymbol{m}$, получаем требуемое равенство $a + c = b + d$.

Предположим теперь, что $a + c = b + d$. Выберем луч SO так, чтобы он был расположен внутри трёхгранного угла $SABC$ и образовывал равные углы с его рёбрами (такой луч можно выбрать согласно задаче 1.13). Докажем, что луч SO обладает требуемым свойством. Пусть $\boldsymbol{m} = \overrightarrow{SO}$. Тогда $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{e}_3) = \lambda$ для некоторого числа $\lambda \neq 0$. Пусть $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{e}_4) = \mu$. Умножая скалярно обе части равенства (1) на вектор $\boldsymbol{m}$, получаем $\lambda a + \lambda c = \lambda b + \mu d$. Поэтому из равенства $a + c = b + d$ следует, что $\lambda = \mu$, т. е. луч SO образует равные углы не только с рёбрами SA, SB и SC, но и с ребром SD.

9.8. Пусть прямая l пересекает прямую AB_1 в точке K. Утверждение задачи эквивалентно тому, что плоскости KBC_1, KCD_1 и KDA_1 имеют общую прямую, т. е. имеют общую точку, отличную от K. Проведём через точку K плоскость, параллельную основаниям пирамиды. Пусть L, M и N — точки пересечения этой плоскости с прямыми BC_1, CD_1 и DA_1 (рис. 9.1 (а)); $A_0B_0C_0D_0$ — параллелограмм, по которому эта плоскость пересекает данную пирамиду или продолжения её рёбер. Точки K L, M и N делят стороны параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$ в одном и том же отношении, т. е. $KLMN$ — параллелограмм. Плоскости KBC_1, KCD_1 и KDA_1 пересекают плоскость $ABCD$ по прямым, проходящим через точки B, C и D параллельно прямым KL, KM и KN. Остаётся доказать, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

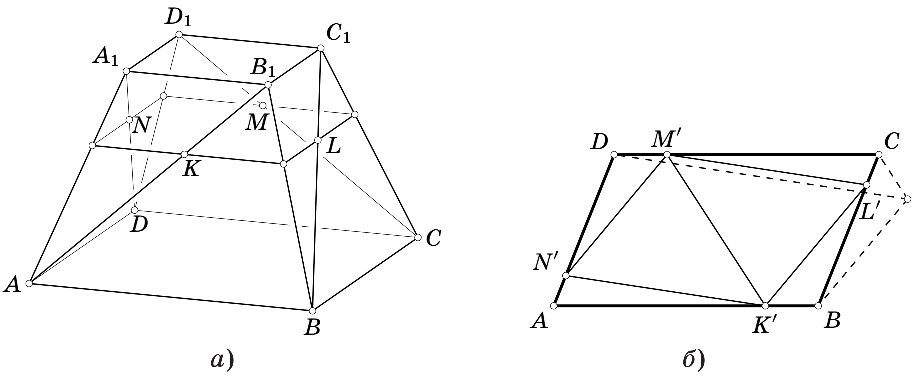


Рис. 9.1

Возьмём на сторонах параллелограмма $ABCD$ точки K', L', M' и N', делящие стороны этого параллелограмма в том же отношении, в каком точки K L, M и N делят стороны параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$. Требуется доказать, что прямые, проходящие через точки B, C и D параллельно прямым $K'L'$, $K'M'$ и $L'M'$, пересекаются в одной точке (рис. 9.1, *б*). Заметим, что прямые, проходящие через вершины K', L' и M' треугольника $K'L'M'$ параллельно прямым BC, BD и CD, пересекаются в точке M, симметричной точке M' относительно середины отрезка CD. Следовательно, прямые, проходящие через точки B, C и D параллельно прямым $K'L'$, $K'M'$ и $K'N'$, тоже пересекаются в одной точке («Задачи по планиметрии», задача 7.45 (б)).

Замечание. Так как аффинным преобразованием параллелограмм $ABCD$ можно перевести в квадрат, требуемое утверждение достаточно доказать для квадрата. Если $ABCD$ — квадрат, то $K'L'M'N'$ — тоже квадрат. Легко проверить, что прямые, проходящие через точки B, C и D параллельно $K'L'$, $K'M'$ и $K'N'$ соответственно, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности квадрата $ABCD$.

9.9. а) Опустим из точки M перпендикуляр MO на плоскость ABC. Так как расстояние от точки A_1 до плоскости ABC равно расстоянию от точки A до прямой BC, угол между плоскостями ABC и A_1BC равен $45°$. Поэтому расстояние от точки O до прямой BC равно длине отрезка MO. Аналогично расстояния от точки O до прямых CA и AB равны длине отрезка MO, а значит, O — центр вписанной окружности треугольника ABC и $MO = r$.

б) Пусть P — точка пересечения прямых B_1C и BC_1. Тогда плоскости AB_1C и ABC_1 пересекаются по прямой AP, а плоскости A_1BC_1 и A_1B_1C — по прямой A_1P. Аналогичные рассуждения показывают, что проекция точки N на плоскость ABC совпадает с проекцией точки M, т. е. она является центром O вписанной окружности треугольника ABC.

Первое решение. Пусть h_a, h_b и h_c — высоты треугольника ABC; Q — проекция точки P на плоскость ABC. Рассматривая трапецию BB_1C_1C, получаем $PQ = \frac{h_bh_c}{h_b + h_c}$. Так как $AO : OQ = AB : BQ = (b + c) : a$, то

$$NO = \frac{aAA_1 + (b + c)PQ}{a + b + c} = \frac{ah_a(h_b + h_c) + (b + c)h_bh_c}{(a + b + c)(h_b + h_c)} = \frac{4S}{a + b + c} = 2r.$$

Второе решение. Пусть K — точка пересечения прямой NO с плоскостью $A_1B_1C_1$. Из решения задачи 3.20 следует, что $MO = \frac{KO}{3}$ и $NK = \frac{KO}{3}$, поэтому $NO = 2MO = 2r$.

9.10. Если p — полупериметр основания призмы, а r — радиус сферы, то площадь основания равна pr, а площадь боковой поверхности равна $4pr$. Следовательно, площадь полной поверхности призмы равна $6S$.

9.11. а) Пусть M и N — середины рёбер PP_1 и AA_1. Ясно, что тетраэдр AA_1PP_1 симметричен относительно прямой MN. Пусть, далее, P' — проекция точки P на плоскость ACC_1A_1. Точка P' лежит на проекции $B'B_1'$ отрезка BB_1 на плоскость и делит её в отношении $B'P' : P'B_1' = 1 : 2$, поэтому P' — середина отрезка AP_1. Следовательно, плоскости APP_1 и AA_1P_1 перпендикулярны. Аналогично плоскости A_1PP_1 и AA_1P_1 перпендикулярны.

б) Так как PP_1N — биссекторная плоскость двугранного угла при ребре PP_1 тетраэдра AA_1PP_1, то достаточно проверить, что сумма двугранных углов при рёбрах PP_1 и AP тетраэдра APP_1N равна 90°. Плоскость PP_1N перпендикулярна грани BCC_1B_1, поэтому нужно проверить, что угол между плоскостями PP_1A и BCC_1B_1 равен углу между плоскостями PP_1A и ABB_1A_1. Равенство этих углов следует из того, что при симметрии относительно прямой PP' плоскость PP_1A переходит в себя, а указанные плоскости граней переходят друг в друга.

ГЛАВА 10

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК И ПОСТРОЕНИЯ

§ 1. Скрещивающиеся прямые

10.1. Найдите геометрическое место середин отрезков, которые параллельны данной плоскости и концы которых лежат на двух данных скрещивающихся прямых.

10.2. Найдите геометрическое место середин отрезков данной длины, концы которых лежат на двух данных скрещивающихся перпендикулярных прямых.

10.3. Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников, которые параллельны данной плоскости и вершины которых лежат на данных прямых.

10.4. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые и точка A на одной из них. Через данные прямые проведены две перпендикулярные плоскости, образующие прямой двугранный угол. Найдите геометрическое место проекций точки A на рёбра таких углов.

10.5. Даны прямая l и точка A. Через точку A проводится прямая l', скрещивающаяся с l. Пусть MN — общий перпендикуляр к этим двум прямым (точка M лежит на l'). Найдите ГМТ M.

10.6. Попарно скрещивающиеся прямые l_1, l_2 и l_3 перпендикулярны одной прямой и пересекают её в точках A_1, A_2 и A_3 соответственно. Пусть M и N — такие точки прямых l_1 и l_2, что прямые MN и l_3 пересекаются. Найдите геометрическое место середин отрезков MN.

10.7. Даны две скрещивающиеся перпендикулярные прямые. Концы отрезков A_1A_2, параллельных данной плоскости, лежат на этих прямых. Докажите, что все сферы с диаметрами A_1A_2 имеют общую окружность.

10.8. Точки A и B двигаются по двум скрещивающимся прямым с постоянными, но не равными скоростями; отношение их скоростей равно k. Пусть M и N — такие точки прямой AB, что $AM : BM =$

$= AN : BN = k$ (точка M лежит на отрезке AB). Докажите, что точки M и N двигаются по двум перпендикулярным прямым.

§ 2. Сфера и трёхгранный угол

10.9. Данные прямые l_1 и l_2 касаются данной сферы. Отрезок MN с концами на этих прямых касается сферы в точке X. Найдите ГМТ X.

10.10. Точки A и B лежат по одну сторону от плоскости Π, причём прямая AB не параллельна Π. Найдите геометрическое место центров сфер, проходящих через данные точки и касающихся данной плоскости.

10.11. Центры двух сфер разного радиуса лежат в плоскости Π. Найдите геометрическое место точек X этой плоскости, через которые можно провести плоскость, касающуюся сфер: а) внутренним образом; б) внешним образом.

* * *

10.12. Две плоскости, параллельные данной плоскости Π, пересекают рёбра трёхгранного угла в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 (одинаковыми буквами обозначены точки, лежащие на одном ребре). Найдите геометрическое место точек пересечения плоскостей ABC_1, AB_1C и A_1BC.

10.13. Найдите геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до плоскостей граней данного трёхгранного угла постоянна.

10.14. Окружность радиуса R касается граней данного трёхгранного угла, все плоские углы которого прямые. Найдите геометрическое место всех возможных положений её центра.

См. также задачи 1.30, 11.13.

§ 3. Разные ГМТ

10.15. На плоскости дан остроугольный треугольник ABC. Найдите геометрическое место проекций на эту плоскость всех точек X, для которых треугольники ABX, BCX и CAX остроугольные.

10.16. Дан куб. Вершины выпуклого многогранника лежат на его рёбрах, причём на каждом ребре лежит ровно одна вершина. Найдите множество точек, принадлежащих всем таким многогранникам.

10.17. Дан плоский четырёхугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место таких точек M, что боковую поверхность пирамиды $MABCD$ можно так пересечь плоскостью, что в сечении получится: а) прямоугольник; б) ромб.

10.18. Ломаная длины a выходит из начала координат, причём любая плоскость, параллельная координатной плоскости, пересекает ломаную не более чем в одной точке. Найдите геометрическое место концов таких ломаных.

ГМТ — прямая или плоскость встречается в задачах 1.29, 1.31, 1.34, 4.30, 18.5. ГМТ — окружность или сфера встречается в задачах 1.30, 2.6, 7.38, 7.39, 12.12.

§ 4. Вспомогательные ГМТ

10.19. Даны положительные числа h, s_1, s_2 и расположенный в пространстве треугольник ABC. Сколькими способами можно выбрать точку D так, чтобы в тетраэдре $ABCD$ высота, опущенная из вершины D, была равна h, а площади граней ACD и BCD были равны соответственно s_1 и s_2?

§ 5. Построения на изображениях

10.20. Дано изображение проекции на некоторую плоскость куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отмеченными точками P, Q, R на рёбрах AA_1, BC, B_1C_1 (рис. 10.1). Постройте на этом изображении сечение куба плоскостью PQR.

10.21. Дано изображение проекции на некоторую плоскость куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отмеченными точками P, Q и R на рёбрах AA_1, BC и C_1D_1. Постройте на этом изображении сечение куба плоскостью PQR.

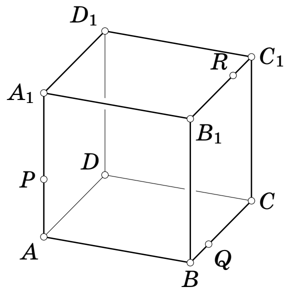


Рис. 10.1

10.22. а) Дано изображение проекции на некоторую плоскость трёхгранного угла $Oabc$, на гранях Obc и Oac которого отмечены точки A и B. Постройте на этом изображении точку пересечения прямой AB с плоскостью Oab.

б) Дано изображение проекции на некоторую плоскость трёхгранного угла с тремя отмеченными на его гранях точками. Постройте на этом изображении сечение трёхгранного угла плоскостью, проходящей через отмеченные точки.

10.23. Дано изображение проекции на некоторую плоскость трёхгранной призмы с параллельными рёбрами a, b и c, на боковых гранях которой отмечены точки A, B и C. Постройте на этом изображении сечение призмы плоскостью ABC.

10.24. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — выпуклый шестигранник с четырёхугольными гранями. Дано изображение проекций на некоторую плоскость трёх его граней, сходящихся в вершине B (и тем самым — семи его вершин). Постройте изображение восьмой его вершины D_1.

§ 6. Построения, связанные с пространственными фигурами

10.25. На плоскости дано шесть отрезков, равных рёбрам тетраэдра $ABCD$. Постройте отрезок, равный высоте h_a этого тетраэдра.

10.26. На плоскости нарисованы три угла, равных плоским углам α, β и γ трёхгранного угла. Постройте на той же плоскости угол, равный двугранному углу, противолежащему плоскому углу α.

10.27. Дан шар. С помощью циркуля и линейки постройте на плоскости отрезок, равный радиусу этого шара.

Решения

10.1. Пусть данные прямые l_1 и l_2 пересекают данную плоскость Π в точках P и Q (если $l_1 \parallel \Pi$ или $l_2 \parallel \Pi$, то искомых отрезков нет). Проведём через середину M отрезка PQ прямые l_1' и l_2', параллельные прямым l_1 и l_2 соответственно. Пусть некоторая плоскость, параллельная плоскости Π, пересекает прямые l_1 и l_2 в точках A_1 и A_2, а прямые l_1' и l_2' — в точках M_1 и M_2. Тогда A_1A_2 — искомый отрезок, причём его середина совпадает с серединой отрезка M_1M_2, так как $M_1A_1M_2A_2$ — параллелограмм. Середины отрезков M_1M_2 лежат на одной прямой, так как все эти отрезки параллельны друг другу.

10.2. Первое решение. Середина любого отрезка с концами на двух скрещивающихся прямых лежит в плоскости, параллельной им и равноудалённой от них. Пусть расстояние между данными прямыми равно a. Тогда длина проекции на рассматриваемую серединную плоскость отрезка длины d с концами на данных прямых равна $\sqrt{d^2-a^2}$. Поэтому искомое ГМТ состоит из середин отрезков длины $\sqrt{d^2-a^2}$ с концами на проекциях данных прямых «на серединную» плоскость (рис. 10.2). Легко проверить, что $OC = \dfrac{AB}{2}$, т. е. искомое ГМТ является окружностью с центром O и радиусом $\dfrac{\sqrt{d^2-a^2}}{2}$.

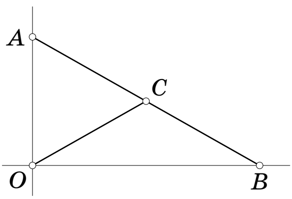


Рис. 10.2

Второе решение. Пусть a — расстояние между данными прямыми, d — длина рассматриваемых отрезков. Выберем систему координат так, чтобы точки первой прямой имели координаты $(x, 0, 0)$, а точки второй прямой имели координаты $(0, y, a)$.

Нас интересуют пары точек, для которых $x^2+a^2+y^2=d^2$, т. е. $x^2+y^2=d^2-a^2$. Середина отрезка с концами в точках с координатами $(x, 0, 0)$ и $(0, y, a)$ имеет координаты $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{a}{2}\right)$, поэтому искомое множество — окружность радиуса $\frac{\sqrt{d^2-a^2}}{2}$ с центром $\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$, расположенная в плоскости $z=\frac{a}{2}$.

10.3. Геометрическим местом середин сторон AB указанных треугольников является прямая l (см. задачу 10.1). Искомое ГМТ состоит из точек, делящих в отношении $1:2$ отрезки, которые параллельны данной плоскости и концы которых лежат на прямой l и на третьей данной прямой. Слегка изменив решение задачи 10.1, можно доказать, что это ГМТ тоже является прямой.

10.4. Пусть Π_1 и Π_1 — перпендикулярные плоскости, проходящие через прямые l_1 и l_2; l — прямая их пересечения; X — проекция на прямую l точки A, лежащей на прямой l_1. Проведём через точку A плоскость Π, перпендикулярную прямой l_2. Из того, что $\Pi\perp l_2$, следует, что $\Pi\perp\Pi_2$. Поэтому прямая AX лежит в плоскости Π. А значит, если B — точка пересечения Π и l_2, то $\angle BXA=90^\circ$, т. е. точка X лежит на окружности с диаметром AB, построенной в плоскости Π.

10.5. Проведём через точку A плоскость, перпендикулярную прямой l. Пусть M' и N' — проекции точек M и N на эту плоскость. Из того, что $MN\perp l$, следует, что $M'N'\parallel MN$. Прямая MN перпендикулярна плоскости AMM', так как $NM\perp MM'$ и $NM\perp AM$; поэтому $NM\perp AM'$, а значит, точка M' лежит на окружности с диаметром $N'A$. Следовательно, искомое ГМТ — цилиндр, диаметрально противоположными образующими которого являются прямая l и прямая t, проходящая через точку A параллельно l; сами прямые l и t следует исключить.

10.6. При проекции на плоскость, перпендикулярную l_3, прямая l_3 переходит в точку A_3, а проекция $M'N'$ прямой MN проходит через эту точку; кроме того, проекции прямых l_1 и l_2 параллельны. Поэтому $\overrightarrow{A_1M'}:\overrightarrow{A_2N'}=$ $=\overrightarrow{A_1A_3}:\overrightarrow{A_2A_3}=\lambda$ — постоянное число, а значит, $\overrightarrow{A_1M}=t\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{A_2N}=t\boldsymbol{b}$. Пусть O и X — середины отрезков A_1A_2 и MN. Тогда $2\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{A_1M}+\overrightarrow{A_2N}=t(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, т. е. все точки X лежат на одной прямой.

10.7. Пусть B_1B_2 — общий перпендикуляр к данным прямым (точки A_1 и B_1 лежат на одной данной прямой). Так как $A_2B_1\perp A_1B_1$, точка B_1 принадлежит сфере с диаметром A_1A_2. Аналогично точка B_2 принадлежит этой сфере. Геометрическим местом середин отрезков A_1A_2, т. е. центров рассматриваемых сфер, является некоторая прямая l (задача 10.1). Любая точка этой прямой равноудалена от B_1 и B_2, поэтому $l\perp B_1B_2$. Пусть M — середина отрезка B_1B_2; O — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l. Окружность радиуса OB_1 с центром O, проходящая через точки B_1 и B_2, будет искомой.

10.8. Пусть A_1 и B_1 — положения точек A и B в другой момент времени; Π — плоскость, параллельная данным скрещивающимся прямым. Рассмотрим проекцию на плоскость Π параллельно прямой A_1B_1. Пусть A', B', M' и N' —

проекции точек A, B, M и N; C' — проекция прямой A_1B_1. Точки M и N двигаются в фиксированных плоскостях, параллельных плоскости Π, поэтому достаточно проверить, что точки M' и N' двигаются по двум перпендикулярным прямым. Так как $A'M' : M'B' = k = A'C' : C'B'$, то $C'M'$ — биссектриса угла $A'C'B'$. Аналогично $C'N'$ — биссектриса угла, смежного с углом $A'C'B'$. Биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны.

10.9. Пусть прямая l_1, содержащая точку M, касается сферы в точке A, а прямая l_2 — в точке B. Проведём через прямую l_1 плоскость, параллельную l_2, и рассмотрим проекцию на эту плоскость параллельно прямой AB. Пусть N' и X' — образы точек N и X при этой проекции. Так как $AM = MX$ и $BN = NX$, то $AM : AN' = AM : BN = XM : XN = X'M : X'N'$, а значит, AX' — биссектриса угла MAN'. Поэтому точка X лежит в плоскости, проходящей через прямую AB и образующей равные углы с прямыми l_1 и l_2 (таких плоскостей две). Искомое ГМТ состоит из двух окружностей, по которым эти плоскости пересекают данную сферу; точки A и B при этом следует исключить.

10.10. Пусть C — точка пересечения прямой AB с данной плоскостью, M — точка касания одной из искомых сфер с плоскостью Π. Так как $CM^2 = CA \cdot CB$, точка M лежит на окружности радиуса $\sqrt{CA \cdot CB}$ с центром C. Следовательно, центр O сферы принадлежит боковой поверхности прямого цилиндра, основанием которого служит эта окружность. Кроме того, центр сферы принадлежит плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему.

Предположим теперь, что точка O равноудалена от A и B и расстояние от точки C до проекции M точки O на плоскость Π равно $\sqrt{CA \cdot CB}$. Пусть CM_1 — касательная к сфере радиуса OA с центром O. Тогда $CM = CM_1$, поэтому $OM^2 = CO^2 - CM^2 = CO^2 - CM_1^2 = OM_1^2$, т. е. точка M принадлежит рассматриваемой сфере. А так как $OM \perp \Pi$, то M — точка касания этой сферы с плоскостью Π. Итак, искомое ГМТ является пересечением боковой поверхности цилиндра с плоскостью.

10.11. а) Пусть данные сферы пересекают плоскость Π по окружностям S_1 и S_2. Общие внутренние касательные к этим плоскостям разбивают плоскость на 4 части. Рассмотрим прямой круговой конус, осевым сечением которого являются те части, которые содержат S_1 и S_2. Плоскости, касающиеся данных сфер внутренним образом, касаются этого конуса. Любая такая плоскость пересекает плоскость Π по прямой, лежащей вне осевого сечения конуса. Искомое ГМТ состоит из точек, лежащих вне осевого сечения конуса (граница осевого сечения входит в ГМТ).

б) Решается аналогично задаче (а). Проводятся общие внешние касательные и рассматривается осевое сечение, состоящее из части плоскости, содержащей обе окружности, и части, ей симметричной.

10.12. Пересечением плоскостей ABC_1 и AB_1C является прямая AM, где M — точка пересечения диагоналей BC_1 и B_1C трапеции BCC_1B_1. Точка M лежит на прямой l, проходящей через середины отрезков BC и B_1C_1 и вершину данного трёхгранного угла (см. «Задачи по планиметрии», задача 19.2).

Прямая l однозначно определяется плоскостью Π; поэтому однозначно определена плоскость Π_a, содержащая прямую l и точку A. Точка пересечения прямой AM с плоскостью ABC принадлежит плоскости Π_a, так как этой плоскости принадлежит вся прямая AM. Аналогично Π_a построим плоскость Π_b; пусть m — прямая пересечения этих плоскостей (плоскость Π_b тоже проходит через прямую m). Искомое ГМТ состоит из точек этой прямой, лежащих внутри данного трёхгранного угла.

10.13. На рёбрах данного трёхгранного угла с вершиной O выберем точки A, B и C, расстояния от которых до плоскостей граней равны данному числу a. Площадь S каждого из треугольников OAB, OBC и OCA равна $3\dfrac{V}{a}$, где V — объём тетраэдра $OABC$. Пусть точка X лежит внутри трёхгранного угла $OABC$, причём расстояния от неё до плоскостей его граней равны a_1, a_2 и a_3. Тогда сумма объёмов пирамид с вершиной X и основаниями OAB, OBC и OCA равна $S\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$. Поэтому $V=S\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}\pm v$, где v — объём тетраэдра $XABC$. Так как $V=S\dfrac{a}{3}$, то $a_1+a_2+a_3=a$ тогда и только тогда, когда $v=0$, т. е. X лежит в плоскости ABC.

Пусть точки A', B' и C' симметричны точкам A, B и C относительно точки O. Так как любая точка лежит внутри одного из восьми трёхгранных углов, образованных плоскостями граней данного трёхгранного угла, то искомым ГМТ является поверхность выпуклого многогранника $ABCA'B'C'$.

10.14. Введём прямоугольную систему координат, направив её оси по рёбрам данного трёхгранного угла. Пусть O_1 — центр окружности; Π — плоскость окружности; α, β и γ — углы между плоскостью Π и координатными плоскостями. Так как расстояние от точки O_1 до прямой пересечения плоскостей Π и Oyz равно R, а угол между этими плоскостями равен α, то расстояние от точки O_1 до плоскости Oyz равно $R\sin\alpha$. Аналогичные рассуждения показывают, что точка O_1 имеет координаты

$$(R\sin\alpha,\ R\sin\beta,\ R\sin\gamma).$$

Так как $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (задача 1.23), то

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2,$$

а значит, $OO_1=\sqrt{2}R$. Кроме того, расстояние от точки O_1 до любой грани трёхгранного угла не больше R. Искомое ГМТ является частью сферы радиуса $\sqrt{2}R$ с центром в начале координат, ограниченной плоскостями $x=R$, $y=R$ и $z=R$.

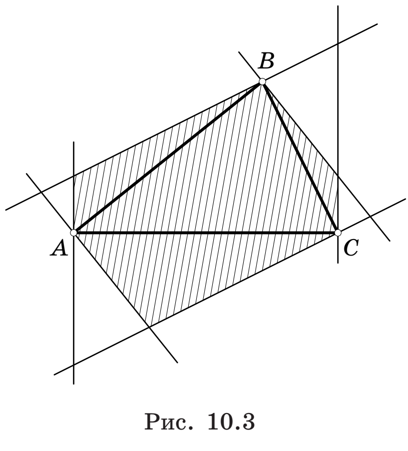


Рис. 10.3

10.15. Если углы XAB и XBA острые, то точка X лежит между плоскостями, проведёнными через точки A и B перпендикулярно прямой AB (для точек X, не лежащих на отрезке AB, верно и обратное). Поэтому искомое ГМТ лежит внутри (но не на сторонах) выпуклого шестиугольника, стороны которого проходят через вершины треугольника ABC перпендикулярно его сторонам (рис. 10.3). Если расстояние от точки X до плоскости ABC больше, чем наибольшая сторона треугольника ABC, то углы AXB, AXC и BXC острые. Поэтому искомое ГМТ — внутренность указанного шестиугольника.

10.16. Каждый рассматриваемый многогранник получается из данного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ путём отсечения тетраэдров от каждой из его вершин. Тетраэдр, отсекаемый от вершины A, содержится в тетраэдре AA_1BD. Таким образом, если от куба отсечь тетраэдры, каждый из которых задан тремя рёбрами куба, выходящими из одной точки, то оставшаяся часть куба содержится в любом из рассматриваемых многогранников. Легко проверить, что оставшаяся часть является октаэдром с вершинами в центрах граней куба. Если же точка не принадлежит этому октаэдру, то нетрудно указать многогранник, которому она не принадлежит; в качестве такого многогранника можно взять тетраэдр AB_1CD_1 или тетраэдр A_1BC_1D.

10.17. Пусть P и Q — точки пересечения продолжений противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$. Тогда MP и MQ — прямые пересечения плоскостей противоположных граней пирамиды $MABCD$, Сечение пары плоскостей, пересекающихся по прямой l, представляет собой две параллельные прямые, только если плоскость сечения параллельна l. Поэтому сечение пирамиды $MABCD$ является параллелограммом, только если плоскость сечения параллельна плоскости MPQ; при этом стороны параллелограмма параллельны MP и MQ.

а) В сечении может получиться прямоугольник, только если $\angle PMQ = 90^\circ$, т. е. точка M лежит на сфере с диаметром PQ; точки этой сферы, лежащие в плоскости данного четырёхугольника, следует исключить.

б) Пусть K и L — точки пересечения продолжений диагоналей AC и BD с прямой PQ. Так как диагонали параллелограмма, получающегося в сечении пирамиды $MABCD$, параллельны прямым MK и ML, то он будет ромбом, только если $\angle KML = 90^\circ$, т. е. точка M лежит на сфере с диаметром KL; точки этой сферы, лежащие в плоскости данного четырёхугольника, следует исключить.

10.18. Пусть (x, y, z) — координаты конца ломаной, (x_i, y_i, z_i) — координаты вектора i-го звена ломаной. Из условия задачи следует, что числа x_i, y_i и z_i ненулевые и имеют тот же знак, что и числа x, y и z соответственно. Поэтому $|x|+|y|+|z| = \sum(|x_i|+|y_i|+|z_i|)$ и $|x_i|+|y_i|+|z_i| > l_i$, где l_i — длина i-го звена ломаной. Следовательно, $|x|+|y|+|z| > \sum l_i = a$. Кроме того, длина вектора (x, y, z) не превосходит длины ломаной, т. е. она не превосходит a.

Докажем теперь, что все точки шара радиуса a с центром в начале координат, лежащие вне октаэдра, задаваемого уравнением $|x|+|y|+|z| \leqslant a$, кроме точек координатных плоскостей, принадлежат искомому ГМТ. Пусть $M = (x, y, z)$ — точка грани указанного октаэдра. Тогда ломаная с вершинами $(0, 0, 0)$, $(x, 0, 0)$, $(x, y, 0)$ и (x, y, z) имеет длину a. «Растягивая» эту ломаную, т. е. перемещая её конец по лучу OM, заметём все точки луча OM, лежащие между сферой и октаэдром (исключая точку грани октаэдра).

10.19. Ответ: 0, 2, 4 или 8. Чтобы высота, опущенная из вершины D, была равна h, точка D должна лежать в одной из двух плоскостей Π_1 и Π_2, параллельных плоскости ABC. Чтобы площадь грани ACD была равна s_1, точка D должна лежать на цилиндре с осью AC, а чтобы площадь грани BCD была равна s_2, точка D должна лежать на цилиндре с осью BC. Пересечение плоскости Π_1 с первым цилиндром — это либо пара прямых, либо одна прямая, либо пустое множество, причём прямые должны быть параллельны AC. Для второго цилиндра получаются прямые, параллельные прямой BC, которая пересекает прямую AC. Поэтому при пересечении цилиндров плоскостью Π_1 получается либо пустое множество, либо пара пересекающихся прямых, либо прямая, пересекающая пару параллельных прямых, либо пара параллельных прямых, пересекающая другую пару параллельных прямых. Количество точек, принадлежащих обоим цилиндрам и плоскости, равно соответственно 0, 1, 2 и 4. Столько же точек пересечения получаем и для плоскости Π_2.

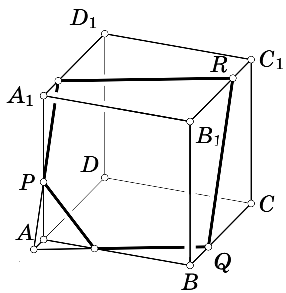


Рис. 10.4

10.20. В процессе построения можно использовать то, что прямые, по которым некоторая плоскость пересекает пару параллельных плоскостей, параллельны. Ход построения виден из рис. 10.4. Сначала через точку P проводим прямую, параллельную прямой RQ, и находим её точки пересечения с прямыми AD и A_1D_1. Эти точки соединяем с точками Q и R и получаем сечения граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. На сечении одной из двух оставшихся граней уже построены две точки, и остаётся только соединить их.

10.21. В этом случае для построения уже не достаточно соображений, использованных в задаче 10.20. Построим поэтому сначала точку M пересечения прямой PR и плоскости грани $ABCD$ следующим образом. Проекцией точки P на плоскость грани $ABCD$ является точка A, а проекцию R' точки R на эту плоскость легко построить (RC_1CR' — параллелограмм). Искомая точка M является точкой пересечения прямых PR и AR'. Соединив точки M и Q, получим сечение грани $ABCD$. Дальнейшее построение проводится таким же способом, как и в задаче 10.20 (рис. 10.5).

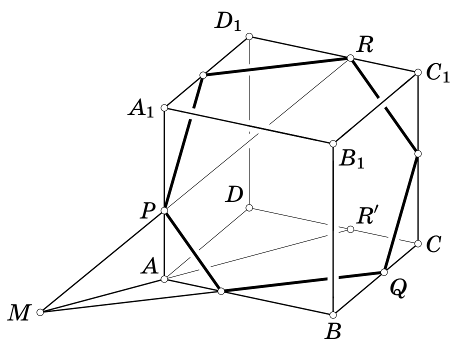


Рис. 10.5

10.22. а) Пусть P — произвольная точка ребра c. Плоскость PAB пересекает рёбра a и b в тех же точках, в каких их пересекают прямые PB и PA соответственно. Обозначим эти точки A_1 и B_1. Тогда искомая точка является точкой пересечения прямых A_1B_1 и AB (рис. 10.6).

б) Пусть на гранях Obc, Oac и Oab отмечены точки A, B и C. Воспользовавшись задачей (а), можно построить точку пересечения прямой AB с плоскостью Oab. Теперь на плоскости Oab известны две точки плоскости ABC: только что построенная точка и точка C. Соединив их, получим искомое сечение плоскости Oab. Дальнейшее построение очевидно.

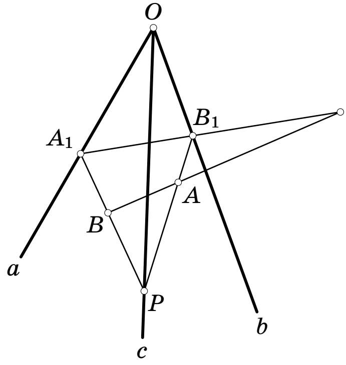


Рис. 10.6

10.23. Пусть точки A, B и C лежат на гранях, противолежащих прямым a, b и c. Построим точку X пересечения прямой AB с гранью, в которой лежит точка C. Выберем для этого на прямой c произвольную точку P и построим сечение призмы плоскостью PAB, т.е. найдём точки B_1 и A_1, в которых прямые PA и PB пересекают рёбра b и a соответственно. Ясно, что X является точкой пересечения прямых AB и A_1B_1. Соединив точки X и C, получим искомое сечение грани, противолежащей ребру c. Дальнейшее построение очевидно.

10.24. Построим сначала прямую пересечения плоскостей граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Этой прямой принадлежат точка P пересечения прямых AB и A_1B_1 и точка Q пересечения прямых BC и B_1C_1. Пусть M — точка пересечения прямых DA и PQ. Тогда M — точка пересечения грани ADD_1A_1 с прямой PQ, т.е. точка D_1 лежит на прямой MA_1. Аналогично если N — точка пересечения прямых CD и PQ, то точка D_1 лежит на прямой C_1N (рис. 10.7).

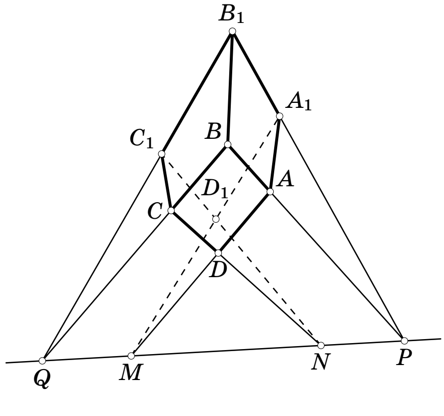


Рис. 10.7

10.25. Опустим из вершины A тетраэдра $ABCD$ перпендикуляр AA_1 на плоскость BCD и перпендикуляры AB', AC' и AD' на прямые CD, BD и BC. По теореме о трёх перпендикулярах $A_1B' \perp CD$, $A_1C' \perp BD$ и $A_1D' \perp BC$.

Из этого вытекает следующее построение. Построим развёртку тетраэдра $ABCD$ и опустим из вершины A высоты во всех гранях, её содержащих (рис. 10.8). Точка A_1 является точкой пересечения продолжений этих высот, а искомый отрезок является катетом прямоугольного треугольника с гипотенузой AB' и катетом A_1B'.

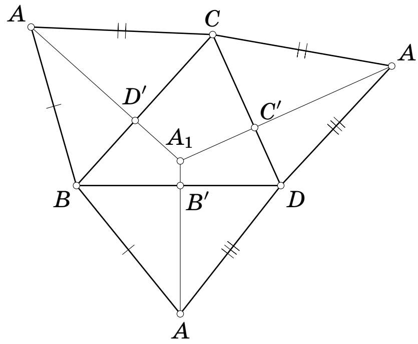


Рис. 10.8

10.26. Рассмотрим трёхгранный угол с плоскими углами α, β и γ. Пусть O — его вершина. На ребре, противолежащем углу α, возьмём точку A и проведём через неё в плоскостях граней перпендикуляры AB и AC к ребру OA. Это построение можно выполнить на данной плоскости для развёртки трёхгранного угла (рис. 10.9). Построим теперь треугольник $BA'C$ со сторонами $BA' = BA_1$ и $CA' = CA_2$. Угол $BA'C$ является искомым.

10.27. П е р в о е р е ш е н и е. Возьмём на сфере произвольные точки A и B. Воспользуемся тем, что все точки сферы, равноудалённые от двух данных точек A и B, лежат на большой окружности. Построив на сфере две окружности одного радиуса с центрами A и B, найдём две точки M и N, лежащие на большой окружности. Изменив раствор циркуля, построим ещё две точки P и Q, лежащие на той же самой большой окружности. Рассмотрим треугольник с вершинами в трёх из построенных точек, например треугольник MNP. С помощью циркуля мы можем построить на плоскости треугольник, равный треугольнику MNP. Радиус описанной окружности этого треугольника — это искомый радиус.

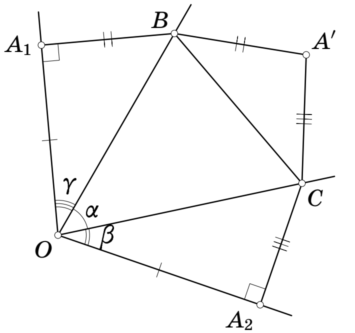


Рис. 10.9

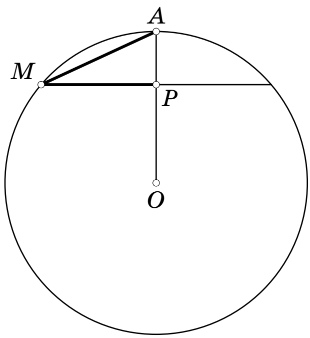


Рис. 10.10

Второе решение. Построим с помощью циркуля на данном шаре окружность с некоторым центром A и возьмём на ней три произвольные точки. С помощью циркуля легко построить на плоскости треугольник, равный треугольнику с вершинами в этих точках. Затем построим описанную окружность этого треугольника и тем самым найдём её радиус.

Рассмотрим сечение данного шара, проходящее через его центр O, точку A и некоторую точку M построенной на шаре окружности. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на отрезок OA (рис. 10.10). Длины отрезков AM и MP известны, поэтому можно построить отрезок AO.

ГЛАВА 11

ВЕКТОРЫ

Основные сведения

Для векторов мы будем использовать обозначения $\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{a}$. Длину вектора $\boldsymbol{a}$ мы будем обозначать $|\boldsymbol{a}|$ или a.

Вектор длины 1 называют *единичным вектором*.

Скалярным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют число $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Легко проверить, что

$$(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

§ 1. Простейшие свойства векторов

11.1. Пусть K, L и M — середины рёбер AD, A_1B_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что треугольник KLM правильный, причём его центр совпадает с центром куба.

11.2. Пусть AB и A_1B_1 — два скрещивающихся отрезка, O и O_1 — их середины. Докажите, что отрезок OO_1 меньше полусуммы отрезков AA_1 и BB_1.

11.3. Пусть M и N — середины сторон BC и DA пространственного четырёхугольника $ABCD$, у которого стороны AB и CD равны. Докажите, что прямая MN образует равные углы с прямыми AB и CD.

11.4. В пространстве построена замкнутая ломаная так, что все звенья имеют одинаковую длину и каждые три последовательных звена попарно перпендикулярны. Докажите, что число звеньев делится на 6.

См. также задачи 2.5, 2.19, 2.20, 6.15, 10.6.

§ 2. Скалярное произведение. Соотношения

11.5. Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Докажите, что вектор с координатами (a, b, c) перпендикулярен этой плоскости.

11.6. а) Докажите, что касательная плоскость к сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$ в точке (x_0, y_0, z_0) задаётся уравнением $x_0x+y_0y+z_0z=R^2$.

б) Докажите, что касательная плоскость к сфере $(x-a)^2+(y-b)^2+$ $+(z-c)^2=R^2$ в точке (x_0, y_0, z_0) задаётся уравнением

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)+(z_0-c)(z-c)=R^2.$$

11.7. Найдите косинус угла между векторами с координатами (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2).

11.8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$. Найдите угол между плоскостями BB_1D и ABC_1.

11.9. В пространстве даны отрезки AB и A_1B_1. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что

$$AA_1^2-AB_1^2+BA_1^2-BB_1^2=2(MA_1^2-MB_1^2).$$

11.10. а) Дан произвольный тетраэдр $ABCD$. Докажите, что

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})=0.$$

б) Докажите, что если в тетраэдре две пары противоположных рёбер перпендикулярны, то третья пара противоположных рёбер тоже перпендикулярна.

11.11. Докажите, что суммы квадратов двух противоположных пар рёбер тетраэдра равны тогда и только тогда, когда третья пара противоположных рёбер перпендикулярна.

11.12. В правильной усечённой пирамиде K — середина стороны AB верхнего основания, L — середина некоторой стороны CD нижнего основания. Докажите, что длины проекций отрезков AB и CD на прямую KL равны.

11.13. Дан трёхгранный угол с вершиной S и точка N. Сфера, проходящая через точки S и N, пересекает рёбра трёхгранного угла в точках A, B и C. Докажите, что центры масс треугольников ABC принадлежат одной плоскости.

11.14. Докажите, что сумма расстояний от внутренней точки выпуклого многогранника до плоскостей его граней не зависит от положения точки тогда и только тогда, когда сумма векторов единичных внешних нормалей к граням равна нулю.

11.15. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре центр масс является серединой отрезка, соединяющего ортоцентр и центр описанной сферы.

11.16. Плоскости α, β, γ, δ касаются описанной сферы тетраэдра $ABCD$ в его вершинах. Докажите, что прямая пересечения плоскостей α и β лежит в одной плоскости с прямой CD тогда и только тогда, когда прямая пересечения плоскостей γ и δ лежит в одной плоскости с прямой AB.

См. также задачи 6.16, 6.20, 7.10, 8.42, 9.7, 14.7, 18.7.

§ 3. Скалярное произведение. Неравенства

11.17. Чему равен наибольший угол между векторами (x, y, z) и (y, z, x)?

11.18. Каково наибольшее возможное число лучей в пространстве, выходящих из одной точки и образующих попарно тупые углы?

11.19. Докажите, что в пространстве нельзя выбрать более шести векторов, все углы между которыми не острые.

11.20. Докажите, что сумма косинусов двугранных углов тетраэдра положительна и не превосходит 2.

11.21. Внутри выпуклого многогранника $A_1 \ldots A_n$ взята точка A, а внутри выпуклого многогранника $B_1 \ldots B_n$ — точка B. Докажите, что если $\angle A_iAA_j \leqslant \angle B_iBB_j$ для всех i, j, то на самом деле все эти нестрогие неравенства являются равенствами.

См. также задачи 6.16, 7.10, 15.14, 16.15.

§ 4. Линейные зависимости векторов

11.22. Точки O, A, B и C не лежат в одной плоскости. Докажите, что точка X лежит в плоскости ABC тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OX} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC}$, где $p + q + r = 1$. Кроме того, если точка X принадлежит треугольнику ABC, то $p : q : r = S_{BXC} : S_{CXA} : S_{AXB}$.

11.23. На рёбрах AB, AC и AD тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, L и M так, что $AB = \alpha AK$, $AC = \beta AL$ и $AD = \gamma AM$.

а) Докажите, что если $\gamma = \alpha + \beta + 1$, то все плоскости KLM содержат фиксированную точку.

б) Докажите, что если $\beta = \alpha + 1$ и $\gamma = \beta + 1$, то все плоскости KLM содержат фиксированную прямую.

11.24. Два правильных пятиугольника $OABCD$ и $OA_1B_1C_1D_1$ с общей вершиной O не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны одной плоскости.

11.25. а) Внутри тетраэдра $ABCD$ взята точка O. Докажите, что если $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}+\delta\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$, то все числа α, β, γ и δ одного знака.

б) Из точки O, лежащей внутри тетраэдра, опущены перпендикуляры $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{OD_1}$ на его грани. Докажите, что если $\alpha\overrightarrow{OA_1}+\beta\overrightarrow{OB_1}+\gamma\overrightarrow{OC_1}+\delta\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{0}$, то все числа α, β, γ и δ одного знака.

11.26. Точка O лежит внутри выпуклого многогранника $A_1\ldots A_n$. Докажите, что существуют такие положительные числа $x_1, \ldots, x_n$, что $x_1\overrightarrow{OA_1}+\ldots+x_n\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{0}$.

§ 5. Разные задачи

11.27. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ — единичные векторы, направленные из центра правильного тетраэдра в его вершины a, $\boldsymbol{u}$ — произвольный вектор. Докажите, что $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{u})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{d},\boldsymbol{u})\boldsymbol{d}=\frac{4}{3}\boldsymbol{u}$.

11.28. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_6$ — единичные векторы, направленные из центра октаэдра в его вершины, а $\boldsymbol{u}$ — произвольный вектор. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{6}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_i=2\boldsymbol{u}$.

11.29. Из точки M, лежащей внутри правильного тетраэдра, опущены перпендикуляры MA_i $(i=1, 2, 3, 4)$ на его грани. Докажите, что $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}=\frac{4}{3}\overrightarrow{MO}$, где O — центр тетраэдра.

11.30. Из точки O, лежащей внутри выпуклого многогранника, проведены лучи, пересекающие плоскости граней и перпендикулярные им. На этих лучах от точки O отложены векторы, длины которых равны площадям соответствующих граней. Докажите, что сумма этих векторов равна нулю.

11.31. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — произвольные векторы. Докажите, что

$$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}| \geqslant |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}|.$$

См. также задачи 2.3, 5.3, 14.7.

§ 6. Векторное произведение

Векторным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют. вектор $\boldsymbol{c}$, длина которого равна площади параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а направлен он перпендикулярно к $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причём так, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ образуют правую тройку, т. е. имеют такую же ориентацию, как большой $(\boldsymbol{a})$, указательный $(\boldsymbol{b})$ и средний $(\boldsymbol{c})$ пальцы правой руки. Обозначение: $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; другое обозначение: $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$.

11.32. Докажите, что
а) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;
б) $\lambda\boldsymbol{a}\times\mu\boldsymbol{b}=\lambda\mu\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;
в) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

11.33. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3). Докажите, что вектор $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ имеет координаты $(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$.

11.34. Докажите, что
а) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$;
б) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$.

11.35. а) Докажите, что

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \vec{0}$$

(*тождество Якоби*).

б) Пусть точка O лежит внутри треугольника ABC, $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ и $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$. Докажите, что тождество Якоби для векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ эквивалентно равенству

$$\boldsymbol{a}S_{BOC}+\boldsymbol{b}S_{COA}+\boldsymbol{c}S_{OAB} = \vec{0}.$$

11.36. Углы при вершинах пространственного шестиугольника прямые, причём у него нет параллельных сторон. Докажите, что общие перпендикуляры к парам противоположных сторон шестиугольника перпендикулярны одной прямой.

11.37. Докажите с помощью векторного произведения утверждение задачи 11.30 для тетраэдра $ABCD$.

11.38. а) Докажите, что плоскости, проходящие через биссектрисы граней трёхгранного угла $SABC$ перпендикулярно плоскостям этих граней, пересекаются по одной прямой, причём эта прямая задаётся вектором $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — единичные векторы, направленные вдоль рёбер SA, SB и SC.

б) На рёбрах трёхгранного угла с вершиной O взяты точки A_1, A_2 и A_3 так, что $OA_1=OA_2=OA_3$. Докажите, что биссекторные плоскости его двугранных углов пересекаются по прямой, задающейся вектором $\overrightarrow{OA_1}\sin\alpha_1+\overrightarrow{OA_2}\sin\alpha_2+\overrightarrow{OA_3}\sin\alpha_3$, где α_i — величина плоского угла, противолежащего ребру OA_i.

11.39. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что сумма квадратов площадей трёх его попарно непараллельных граней равна сумме квадратов площадей граней тетраэдра A_1BC_1D.

Число $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ называют *смешанным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Используя геометрический смысл векторного произведения, легко проверить, что абсолютная величина этого числа равна объёму параллелепипеда, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, причём это число положительно, если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — правая тройка векторов.

11.40. Докажите, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы с координатами (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) и (c_1, c_2, c_3), равен

$$\pm(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1).$$

11.41. Докажите, что векторы с координатами (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) и (c_1, c_2, c_3) параллельны одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 = a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1.$$

11.42. Длины рёбер AD, BD, CD, BC, CA и AB тетраэдра $ABCD$ равны a, b, c, a', b' и c' соответственно. Докажите, что площадь параллелограмма, образованного серединами всех рёбер, кроме AB и CD, равна

$$\frac{1}{8}\sqrt{c^2c'^2 - (a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2)^2}.$$

Для тех, кто знаком с понятием произведения матриц, поясним связь между векторным произведением и коммутатором двух матриц. Каждому вектору $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ в трёхмерном пространстве можно сопоставить кососимметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сопоставлены матрицы A и B. Рассмотрим матрицу $[A, B] = AB - BA$ — *коммутатор* матриц A и B. Несложные вычисления показывают, что вектору $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ сопоставлена матрица $[A, B]$.

§ 7. Уравнение общего перпендикуляра

С помощью векторного произведения можно получить удобное для работы уравнение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым (задача 11.45). Но сначала мы получим уравнение прямой, записанное с помощью векторного произведения (задача 11.43).

11.43. Докажите, что любую прямую можно задать уравнением $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор точки прямой, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — некоторые постоянные векторы, причём $\boldsymbol{a} \neq \vec{0}$.

11.44. Докажите, что прямые $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$, где векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ не параллельны, пересекаются тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}') + (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) = 0$.

11.45. Докажите, что общий перпендикуляр к прямым $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ задаётся уравнением $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$, а $\boldsymbol{b}$ — проекция вектора $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$.

Ясно, что $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{b}$. Поэтому уравнение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ задаёт прямую лишь в том случае, когда $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

Сопоставим паре векторов $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ прямую, заданную уравнением $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{b}$, где $\mathrm{pr}\, \boldsymbol{b}$ — проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{a}$. Зададим также умножение на парах векторов следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}'; \boldsymbol{b}') = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}'; \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}').$$

11.46. Докажите, что произведению пар сопоставляется общий перпендикуляр к прямым, сопоставленным этим парам.

11.47. Докажите, что произведение пар векторов удовлетворяет тождеству Якоби.

11.48. Прямые a, b и c попарно не параллельны. Пусть a', b', c' — общие перпендикуляры к парам прямых b и c, c и a, a и b. Пусть, далее, a'', b'', c'' — общие перпендикуляры к парам прямых a и a', b и b', c и c'. Докажите, что прямые a'', b'' и c'' имеют общий перпендикуляр.

§ 8. Выпуклые линейные комбинации

11.49. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — фиксированные точки, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — фиксированные числа. Выберем произвольную точку X и зададим точку P равенством $\overrightarrow{XP} = \lambda_1 \overrightarrow{XA_1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{XA_n}$. Докажите, что положение точки P не зависит от выбора точки X тогда и только тогда, когда $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$.

В случае, когда $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, точку P из задачи 11.49 мы будем обозначать $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n$.

11.50. Докажите, что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — неотрицательные числа, сумма которых равна 1, то точка $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n$ принадлежит выпуклой оболочке точек $A_1, \ldots, A_n$, причём любую точку выпуклой оболочки можно представить в виде $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n$.

Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — неотрицательные числа, сумма которых равна 1, то вектор $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n$ называют *выпуклой линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

11.51. Пусть выпуклая линейная комбинация $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n$ векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ единичной длины равна нулевому вектору. Докажите, что тогда все числа λ_i не превосходят $\frac{1}{2}$.

11.52. Точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на единичной сфере, причём их выпуклая оболочка содержит центр O сферы.

а) Докажите, что длина вектора $\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$ не превосходит $n-2$.

б) Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между этими точками не меньше $4(n-1)$.

в) Докажите, что сумма попарных расстояний между этими точками не меньше $2(n-1)$.

§ 9. Метод усреднения

Метод усреднения для векторов на плоскости уже обсуждался в книге «Задачи по планиметрии». Он заключается в следующем. Пусть на плоскости каждому углу φ сопоставлено число $f(\varphi)$. Тогда среднее значение функции f равно $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$. В качестве функции $f(\varphi)$ мы можем взять длину проекции фиксированного вектора $\boldsymbol{v}$ на прямую, образующую угол φ с некоторой фиксированной прямой. Тогда непосредственное вычисление интеграла показывает, что среднее значение функции $f(\varphi)$ равно $\frac{2}{\pi}|\boldsymbol{v}|$, т. е. оно зависит только от длины вектора $\boldsymbol{v}$ и не зависит от его направления. Из этого следует, что если на плоскости есть два набора векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, причём сумма длин проекций векторов первого набора на любую прямую не больше суммы длин проекций векторов второго набора на ту же прямую, то сумма длин векторов первого набора не больше суммы длин векторов второго набора. Действительно, если сумма функций всегдане превосходит суммы некоторых других функций, то такое же неравенство имеет место и для их средних значений.

Такой подход, основанный на вычислении интегралов, не годится для векторов в пространстве (точнее говоря, при таком подходе требуется не обычный интеграл, а интеграл по сфере). Но к вычислению среднего значения длины проекции вектора на плоскости можно подойти и по-другому. Этот новый подход интересен для нас тем, что таким же способом можно вычислить и среднее значение длины проекции вектора в пространстве.

Геометрический смысл рассмотренного выше интеграла следующий. Фиксируем на плоскости точку O и сопоставим каждому углу φ конец X единичного вектора $\overrightarrow{OX}$, направление которого соответствует углу φ. В результате каждому углу φ будет соответствовать точка окружности с центром O, причём разность двух углов будет равна длине соответствующей дуги. Разобьём окружность на мелкие дуги и рассмотрим сумму $\sum\limits_k f(\varphi_k)\Delta l_k$, где φ_k — некоторая точка k-й дуги, Δl_k — длина этой дуги. При измельчении разбиения эта сумма стремится к $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$. Чтобы получить среднее значение функции f, этот интеграл нужно разделить на длину окружности, т. е. на 2π.

11.53. а) Чему равно среднее значение длины проекции вектора в пространстве на прямую?

б) Даны два набора векторов в пространстве $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, причём сумма длин проекций векторов первого набора на любую прямую не больше суммы длин проекций векторов второго набора на ту же прямую. Докажите, что сумма длин векторов первого набора не больше суммы длин векторов второго набора.

11.54. Докажите, что если один выпуклый многогранник расположен внутри другого выпуклого многогранника, то площадь поверхности внутреннего многогранника меньше площади поверхности внешнего многогранника.

11.55. Докажите, что если площадь любой проекции выпуклого многогранника не превосходит 1, то площадь его поверхности не превосходит 4.

11.56. Пусть в пространстве даны векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, сумма длин которых равна L. Докажите, что среди них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше $\frac{L}{4}$.

11.57. Пусть один тетраэдр расположен внутри другого тетраэдра.

а) Докажите, что отношение суммы длин рёбер внутреннего тетраэдра к сумме длин рёбер внешнего тетраэдра не превосходит $\frac{4}{3}$.

б) Докажите, что это отношение может быть сколь угодно близко к $\frac{4}{3}$. (В частности, сумма длин рёбер внутреннего тетраэдра может быть больше суммы длин рёбер внешнего тетраэдра.)

11.58. Пусть многогранник с m вершинами расположен внутри многогранника с n вершинами. Докажите, что отношение суммы попарных расстояний между вершинами внутреннего многогранника к сумме попарных расстояний между вершинами внешнего многогранника не превосходит $\frac{m^2}{4(n-1)}$ при чётном m и $\frac{m^2-1}{4(n-1)}$ при нечётном m.

11.59. Решите методом усреднения задачу 11.31.

Решения

11.1. Пусть O — центр куба. Тогда $2\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{C_1D}$, $2\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{DA_1}$ и $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{A_1C_1}$. Заметив, что треугольник C_1DA_1 правильный, получаем, что треугольник KLM тоже правильный, причём центры этих треугольников совпадают.

11.2. Сложим равенства $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1A_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1B_1}$. Учитывая, что $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{O_1A_1}+\overrightarrow{O_1B_1}=\vec{0}$, получим $\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1})$. Из этого требуемое неравенство следует очевидным образом, поскольку прямые AA_1 и BB_1 не могут быть параллельны.

11.3. Сложим равенства $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CM}$. Учитывая, что $\overrightarrow{NA}=-\overrightarrow{ND}$ и $\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{MC}$, получаем $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$. Длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны, поэтому прямая MN параллельна биссектрисе угла, образованного этими векторами, выходящими из одной точки.

11.4. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — векторы трёх последовательных звеньев данной ломаной. После векторов $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ должен идти перпендикулярный им вектор, т. е. вектор $\pm\boldsymbol{e}_1$. Продолжая эти рассуждения, получаем, что последовательность векторов звеньев имеет вид $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\pm\boldsymbol{e}_1$, $\pm\boldsymbol{e}_2$, $\pm\boldsymbol{e}_3$, ... Поэтому число звеньев ломаной делится на 3. Ясно также, что количество звеньев $\boldsymbol{e}_1$ должно быть равно количеству звеньев $-\boldsymbol{e}_1$. То же самое верно для $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$. Поэтому число звеньев чётно.

11.5. Пусть (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) — точки данной плоскости. Тогда $ax_1+by_1+cz_1-(ax_2+by_2+cz_2)=0$. Это означает, что скалярное произведение векторов (a, b, c) и $(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$ равно нулю. Поэтому любая прямая, проходящая через две точки данной плоскости, перпендикулярна вектору (a, b, c).

11.6. а) Вектор (x_0, y_0, z_0) перпендикулярен касательной плоскости, поэтому согласно задаче 11.5 касательная плоскость задаётся уравнением вида $x_0x+y_0y+z_0z=k$. Точка (x_0, y_0, z_0) лежит в этой плоскости, поэтому $x_0^2+y_0^2+z_0^2=k$. С другой стороны, эта точка лежат на сфере, поэтому $x_0^2+y_0^2+z_0^2=R^2$. Следовательно, $k=R^2$.

б) Вектор (x_0-a, y_0-b, z_0-v) перпендикулярен касательной плоскости, поэтому касательная плоскость задаётся уравнением вида

$$(x_0-a)x+(y_0-b)y+(z_0-c)z=k.$$

Точка (x_0, y_0, z_0) лежит в этой плоскости, поэтому

$$x_0^2-x_0a+y_0^2-y_0b+z_0^2-z_0c=k.$$

С другой стороны, эта точка лежат на сфере, поэтому

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2=R^2.$$

Следовательно, $k = R^2 + x_0a - a^2 + y_0b - b^2 + z_0c - c^2$. Таким образом, уравнение касательной плоскости имеет вид

$$(x_0 - a)x + (y_0 - b)y + (z_0 - c)z = R^2 + x_0a - a^2 + y_0b - b^2 + z_0c - c^2.$$

Это уравнение легко преобразуется к требуемому виду.

11.7. Если $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — две вектора, а φ — угол между ними, то $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cos\varphi$. Поэтому искомый косинус угла равен

$$\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

11.8. Выберем в качестве начала координат точку A и направим оси Ox, Oy и Oz по лучам AB, AD и AA_1. Тогда вектор с координатами $(b, a, 0)$ перпендикулярен плоскости BB_1D, а вектор $(0, c, -b)$ перпендикулярен плоскости ABC_1. Поэтому косинус угла между этими векторами равен $\dfrac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}$.

11.9. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{A_1A}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BB_1}$ и $\boldsymbol{m} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Тогда

$$AA_1^2 - AB_1^2 + BA_1^2 - BB_1^2 =$$
$$= a^2 - b^2 + |\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{m}|^2 - |\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{m}|^2 = 2(a^2 - b^2) + 4(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m}) - 4(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{m})$$

и

$$MA_1^2 - MB_1^2 = |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{m}|^2 - |\boldsymbol{b} + \boldsymbol{m}|^2 = a^2 - b^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m}) - 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{m}).$$

11.10. а) Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{CD}$. Тогда $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ и $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

б) Очевидно следует из задачи (а).

11.11. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{CD}$ Равенство $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$ означает, что $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}|^2$, т. е. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 0$.

11.12. Если вектор $\boldsymbol{x}$ лежит в плоскости верхнего или нижнего основания, то будем обозначать через $R\boldsymbol{x}$ вектор, полученный из $\boldsymbol{x}$ поворотом на 90° (в этой плоскости) в положительном направлении. Пусть O_1 и O_2 — центры верхнего и нижнего оснований; $\overrightarrow{O_1K} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{O_2L} = \boldsymbol{b}$. Тогда $\overrightarrow{AB} = kR\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{CD} = kR\boldsymbol{b}$. Требуется проверить, что $|(\overrightarrow{KL}, \overrightarrow{AB})| = |(\overrightarrow{KL}, \overrightarrow{CD})|$, т. е.

$$|(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, kR\boldsymbol{a})| = |(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, kR\boldsymbol{b})|,$$

где $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{O_1O_2}$. Учитывая, что скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю, получаем $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, kR\boldsymbol{a}) = k(\boldsymbol{b}, R\boldsymbol{a})$ и $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, kR\boldsymbol{b}) = -k(\boldsymbol{a}, R\boldsymbol{b})$. Так как при повороте обоих векторов на 90° их скалярное произведение не изменяется и $R(R\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a}$, то $(\boldsymbol{b}, R\boldsymbol{a}) = (R\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{a}, R\boldsymbol{b})$.

11.13. Пусть O — центр сферы; M — центр масс треугольника ABC; $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{SO}$; $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — единичные векторы, направленные по рёбрам трёхгранного угла. Тогда $3\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 2((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{c})$. Центр O сферы принадлежит плоскости, проходящей через середину отрезка SN перпендикулярно ему. Поэтому $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 + \lambda \boldsymbol{e}_2 + \mu \boldsymbol{e}_3$, где $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ — некоторые фиксированные векторы. Следовательно, $3\overrightarrow{SM} = 2(\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_3)$, где $\varepsilon_i = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{b})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{c})\boldsymbol{c}$.

11.14. Пусть $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k$ — единичные внешние нормали к граням; $M_1, \ldots$ $\ldots, M_k$ — произвольные точки этих граней. Сумма расстояний от внутренней точки X многогранника до всех граней равна

$$\sum (\overrightarrow{XM_i}, \boldsymbol{n}_i) = \sum (\overrightarrow{XO}, \boldsymbol{n}_i) + \sum (\overrightarrow{OM_i}, \boldsymbol{n}_i),$$

где O — некоторая фиксированная внутренняя точка многогранника. Эта сумма не зависит от X, только если $\sum (\overrightarrow{XO}, \boldsymbol{n}_i) \equiv 0$, т. е. $\sum \boldsymbol{n}_i = 0$.

11.15. Пусть O — центр описанной сферы ортоцентрического тетраэдра, H — его ортоцентр, M — центр масс. Ясно, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}.$$

Поэтому достаточно проверить, что $\overrightarrow{OH} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$. Докажем, что если $\overrightarrow{OX} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$, то X — ортоцентр. Покажем, например, что $AX \perp CD$. Ясно, что

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX} = \frac{-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}.$$

Поэтому $2(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AX}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) + (-\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Оба слагаемых равны нулю: первое — вследствие того, что $CD \perp AB$, а второе — вследствие того, что $OC = OD$. Аналогично доказывается, что $AX \perp BC$, т. е. прямая AX перпендикулярна грани BCD. Для прямых BX, CX и DX доказательство аналогично.

11.16. Пусть O — центр описанной сферы тетраэдра $ABCD$, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$. Прямая пересечения плоскостей α и β лежит в одной плоскости с прямой CD тогда и только тогда, когда плоскости α и β пересекают прямую CD в одной и той же точке (мы подразумеваем, что если плоскости α и β параллельны прямой CD, то эта точка пересечения бесконечно удалённая). Точка X принадлежит плоскости α тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$, где $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$. С другой стороны, точка X принадлежит прямой CD тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{c} + (1 - \lambda)\boldsymbol{d}$ для некоторого числа λ (бесконечно удалённая точка соответствует $\lambda = \infty$). Таким образом, точка X, лежащая на прямой CD, принадлежит плоскости α тогда и только тогда, когда

$$(\lambda\boldsymbol{c} + (1 - \lambda)\boldsymbol{d} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0,$$

т. е. $\lambda = \dfrac{R^2 - (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})}$, где R — радиус описанной сферы. А для того, чтобы точка X принадлежала плоскости β, нужно, чтобы выполнялось равенство $\lambda = \dfrac{R^2 - (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b})}$. Соотношение

$$\frac{R^2 - (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})} = \frac{R^2 - (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b})}$$

можно преобразовать к следующему симметричному виду:

$$(R^2 - (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}))(R^2 - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})) = (R^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}))(R^2 - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})).$$

Условие, что прямая пересечения плоскостей γ и δ лежит в одной плоскости с прямой AB, имеет точно такой же вид.

11.17. Ответ: 120°. Пусть $\boldsymbol{u} = (x, y, z)$ и $\boldsymbol{v} = (y, z, x)$. Тогда

$$\frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|} = \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{1}{2} \geqslant -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ.$$

Следовательно, угол между векторами $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ не превосходит 120°.

11.18. Ответ: 4. Будем рассматривать вместо лучей векторы. Можно считать, что первый вектор имеет координаты $(1, 0, 0)$. Тогда остальные векторы имеют координаты (x_i, y_i, z_i), где $x_i < 0$. Можно считать, что второй вектор имеет координаты $(x_2, 1, 0)$. Тогда остальные векторы имеют координаты (x_i, y_i, z_i), где $x_2x_i + y_i < 0$. Числа x_2 и x_i отрицательные, поэтому $x_2x_i > 0$, а значит, $y_i < 0$. При $i, j > 2$ имеет место неравенство $x_ix_j + y_iy_j + z_iz_j < 0$. Но $x_ix_j > 0$ и $y_iy_j > 0$, поэтому $z_iz_j < 0$, т.е. числа z_i и z_j разного знака. Таких чисел не может быть больше двух.

11.19. Предположим, что углы между векторами $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_7$ не острые. Направим ось Ox по вектору $\boldsymbol{e}_1$. В плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{e}_1$, не может быть более четырёх векторов, углы между которыми не острые; вместе с вектором $-\boldsymbol{e}_1$ получится всего лишь шесть векторов. Поэтому выбрать вектор $\boldsymbol{e}_2$ и направить ось Oy можно так, что $\boldsymbol{e}_2 = (x_2, y_2, 0)$, где $x_2 \neq 0$ (а значит, $x_2 < 0$) и $y_2 > 0$. Пусть $\boldsymbol{e}_k = (x_k, y_k, z_k)$ при $k = 3, \ldots, 7$. Тогда $x_k \leqslant 0$ и $x_kx_2 + y_ky_2 \leqslant 0$. Поэтому $x_kx_2 \geqslant 0$, а значит, $y_ky_2 \leqslant 0$, т.е. $y_k \leqslant 0$. Так как $(\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_r) \leqslant 0$ при $3 \leqslant s, r \leqslant 7$ и $x_rx_s \geqslant 0, y_ry_s \geqslant 0$, то $z_rz_s \leqslant 0$. В плоскости Oxy лежат векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, поэтому в этой плоскости лежит не более двух из векторов $\boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_7$. Таким образом, среди пяти чисел $z_3, \ldots, z_7$ нулевых не более двух, поэтому среди трёх оставшихся чисел обязательно найдутся два числа одного знака. Получено противоречие.

11.20. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ — единичные векторы, перпендикулярные граням и направленные во внешнюю сторону; $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$; s — указанная сумма косинусов. Так как $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = -\cos\varphi_{ij}$, где φ_{ij} — угол между гранями с номерами i и j, то $|\boldsymbol{n}|^2 = 4 - 2s$. Неравенство $s \leqslant 2$ теперь очевидно. Остаётся проверить, что $s > 0$, т.е. $|\boldsymbol{n}| < 2$.

Существуют такие ненулевые числа α, β, γ и δ, что $\alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3 + \delta\boldsymbol{e}_4 = 0$. Пусть для определённости δ — наибольшее по абсолютной величине среди этих чисел. Поделив данное равенство на δ, можно считать, что $\delta = 1$; тогда числа α, β и γ положительны (см. задачу 11.25 (б)) и не превосходят 1. Так как $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} - \alpha\boldsymbol{e}_1 - \beta\boldsymbol{e}_2 - \gamma\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4 = (1 - \alpha)\boldsymbol{e}_1 + (1 - \beta)\boldsymbol{e}_2 + (1 - \gamma)\boldsymbol{e}_3$, то

$$|\boldsymbol{n}| \leqslant 1 - \alpha + 1 - \beta + 1 - \gamma = 3 - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Остаётся заметить, что $1 = |\boldsymbol{e}_4| = |\alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3| \leqslant \alpha + \beta + \gamma$, причём равенства быть не может, так как данные векторы неколлинеарны.

11.21. Пусть векторы $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{b}_i$ сонаправлены с лучами AA_i и BB_i и имеют единичную длину. Согласно задаче 11.26 существуют такие положительные числа $x_1, \ldots, x_n$, что $x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = 0$. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n$. Так как $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) \leqslant (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$ по условию, то

$$|\boldsymbol{b}|^2 = \sum x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) \leqslant \sum x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = |x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_n|^2 = 0,$$

причём если хотя бы одно неравенство $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) < (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$ строгое, то получим строгое неравенство $|\boldsymbol{b}|^2 < 0$, чего не может быть.

11.22. Точка X лежит в плоскости ABC тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, т. е.

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \mu(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \\ = (1 - \lambda - \mu)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}.$$

Пусть точка X принадлежит треугольнику ABC. Докажем, например, что $\lambda = S_{CXA} : S_{ABC}$. Равенство $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ означает, что отношение высот, опущенных из точек X и B на прямую AC, равно λ, а отношение этих высот равно $S_{CXA} : S_{ABC}$.

11.23. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AD}$. Пусть, далее, X — произвольная точка и $\overrightarrow{AX} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}$. Точка X принадлежит плоскости KLM, если

$$\overrightarrow{AX} = p\overrightarrow{AK} + q\overrightarrow{AL} + r\overrightarrow{AM} = \frac{p}{\alpha}\boldsymbol{a} + \frac{q}{\beta}\boldsymbol{b} + \frac{r}{\gamma}\boldsymbol{c},$$

где $p + q + r = 1$ (см. задачу 11.22), т. е. $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 1$.

а) Числа λ, μ и ν требуется подобрать так, чтобы для любых α и β выполнялось равенство $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu(\alpha + \beta + 1) = 1$, т. е. $\lambda + \nu = 0$, $\mu + \nu = 0$ и $\nu = 1$.

б) Точка X принадлежит всем рассматриваемым плоскостям, если

$$\lambda(\beta - 1) + \mu\beta + \nu(\beta + 1) = 1$$

для всех β, т. е. $\lambda + \mu + \nu = 0$ и $\nu - \lambda = 1$. Такие точки X заполняют прямую.

11.24. Пусть $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$. Тогда, так как правильные пятиугольники подобны, $\overrightarrow{OC_1} = \lambda\overrightarrow{OA_1} + \mu\overrightarrow{OB_1}$, а значит, $\overrightarrow{CC_1} = \lambda\overrightarrow{AA_1} + \mu\overrightarrow{BB_1}$, т. е. прямая CC_1 параллельна плоскости Π, содержащей векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$. Аналогично доказывается, что прямая DD_1 параллельна плоскости Π.

11.25. а) Перенесём в равенстве $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$ все слагаемые с отрицательными числами в правую часть. Если p, q и r — положительные числа, то конец вектора $p\overrightarrow{OP} + q\overrightarrow{OQ}$ лежит внутри угла POQ, а конец вектора $p\overrightarrow{OP} + q\overrightarrow{OQ} + r\overrightarrow{OR}$ — внутри трёхгранного угла $OPQR$ с вершиной O. Остаётся заметить, что, например, ребро CD лежит вне угла AOB, а вершина D — вне трёхгранного угла $OABC$.

б) Так как точка O лежит внутри тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$, можно воспользоваться решением задачи (а).

11.26. Пусть продолжение луча OA_i за точку O пересекает многогранник в точке M; P — одна из вершин грани, содержащей точку M; QR — сторона этой грани, пересекающаяся с лучом PM. Тогда $\overrightarrow{OM} = p\overrightarrow{OP} + q\overrightarrow{OQ} + r\overrightarrow{OR}$, где $p, q, r > 0$. Так как векторы $\overrightarrow{OA_i}$ и $\overrightarrow{OM}$ противоположно направлены, то $\overrightarrow{OA_i} + \alpha\overrightarrow{OP} + \beta\overrightarrow{OQ} + \gamma\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{0}$, где $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$, а P, Q, R — некоторые вершины многогранника. Записав такие равенства для всех i от 1 до n и сложив их, получим требуемое.

11.27. Первое решение. Любой вектор $\boldsymbol{u}$ можно представить в виде $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$; поэтому доказательство достаточно провести лишь для векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Так как центр правильного тетраэдра делит его медиану в отношении $1:3$, то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) = -\frac{1}{3}.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\overrightarrow{0}$, получаем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{a} = \frac{4}{3}\boldsymbol{a}.$$

Для векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ доказательство проводится аналогично.

Второе решение. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ясно, что AB_1CD_1 — правильный тетраэдр. Введём прямоугольную систему координат с началом в центре куба и осями, параллельными рёбрам куба. Тогда $\sqrt{3}\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$, $\sqrt{3}\boldsymbol{b} = (-1, -1, 1)$, $\sqrt{3}\boldsymbol{c} = (-1, 1, -1)$ и $\sqrt{3}\boldsymbol{d} = (1, -1, -1)$. Пусть $\boldsymbol{u} = (x, y, z)$. Несложные, но несколько громоздкие вычисления приводят теперь к требуемому результату.

11.28. Введём прямоугольную систему координат с началом в центре октаэдра так, чтобы его вершины лежали на осях координат. Тогда векторы $\boldsymbol{e}_i$ — это векторы $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ и $(0, 0, \pm 1)$. Пусть $\boldsymbol{u} = (x, y, z)$. Несложные вычисления приводят к требуемому результату.

11.29. Опустим из точки O перпендикуляры OB_i на грани тетраэдра. Пусть $\boldsymbol{a}_i$ — единичный вектор, сонаправленный с $\overrightarrow{OB_i}$. Тогда $(\overrightarrow{OM}, \boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i + \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{OB_i}$. Так как тетраэдр $B_1B_2B_3B_4$ правильный, сумма векторов $\overrightarrow{OB_i}$ равна нулю. Следовательно,

$$\sum \overrightarrow{MA_i} = \sum (\overrightarrow{MO}, \boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i = \frac{4}{3}\overrightarrow{MO}$$

(см. задачу 11.27).

11.30. Первое решение. Докажем, что сумма проекций всех данных векторов на любую прямую l равна нулю. Рассмотрим для этого проекцию многогранника на плоскость, перпендикулярную прямой l. Проекция многогранника покрыта проекциями его граней в два слоя, так как грани можно разбить на два типа: «видимые сверху» и «видимые снизу» (грани, проецирующиеся в отрезки, можно не учитывать). Приписав площадям проекций граней одного типа знак плюс, а граней другого типа знак минус, получим, что сумма площадей проекций граней с учётом знака равна нулю. Заметим теперь, что площадь проекции грани равна длине проекции соответствующего вектора на прямую l (см. задачу 2.15), причём для граней разного типа проекции векторов противоположно направлены. Следовательно, сумма проекций векторов на прямую l тоже равна нулю.

Второе решение. Пусть X — точка внутри многогранника, h_i — расстояние от неё до плоскости i-й грани. Разрежем многогранник на пирамиды с вершиной X, основаниями которых служат его грани. Объём V многогранника равен сумме объёмов этих пирамид, т. е. $3V = \sum h_i S_i$, где S_i — площадь i-й грани.

Пусть, далее, $\boldsymbol{n}_i$ — единичный вектор внешней нормали к i-й грани, M_i — произвольная точка этой грани. Тогда $h_i = (\overrightarrow{XM_i}, \boldsymbol{n}_i)$, поэтому

$$3V = \sum h_i S_i = \sum (\overrightarrow{XM_i}, S_i\boldsymbol{n}_i) = \\ = \sum (\overrightarrow{XO}, S_i\boldsymbol{n}_i) + \sum (\overrightarrow{OM_i}, S_i\boldsymbol{n}_i) = (\overrightarrow{XO}, \sum S_i\boldsymbol{n}_i) + 3V$$

(здесь O — некоторая фиксированная точка многогранника). Следовательно, $\sum S_i\boldsymbol{n}_i = 0$.

11.31. Фиксируем $a = |\boldsymbol{a}|$, $b = |\boldsymbol{b}|$ и $c = |\boldsymbol{c}|$. Пусть x, y, z — косинусы углов между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}$. Разность между левой и правой частями требуемого неравенства равна

$$a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2(abx + bcy + acz)} - \sqrt{a^2 + b^2 + 2abx} - \\ - \sqrt{b^2 + c^2 + 2bcy} - \sqrt{c^2 + a^2 + 2acz} = f(x, y, z).$$

Числа x, y и z связаны некоторыми неравенствами, но нам будет проще доказать, что $f(x, y, z) \geqslant 0$ для всех x, y, z, не превосходящих по модулю 1.

Функция

$$\varphi(t) = \sqrt{p + t} - \sqrt{q + t} = \frac{p - q}{\sqrt{p + t} + \sqrt{q + t}}$$

монотонна по t. Следовательно, при фиксированных y и z функция $f(x, y, z)$ достигает наименьшего значения, когда $x = \pm 1$. Фиксируем затем $x = \pm 1$ и z; в этом случае функция f достигает наименьшего значения, когда $y = \pm 1$. Наконец, фиксировав $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$, получаем, что функция f достигает наименьшего значения, когда числа x, y, z равны ± 1. В этом случае векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны и неравенство легко проверяется.

Замечание. По поводу другого решения см. задачу 11.59.

11.32. а) и б) легко следуют из определения.

в) Первое решение. Введём систему координат $Oxyz$, направив ось Ox вдоль вектора $\boldsymbol{a}$. Можно проверить, что векторным произведением векторов $\boldsymbol{a} = (a, 0, 0)$ и $\boldsymbol{u} = (x, y, z)$ является вектор $(0, -az, ay)$. В самом деле, этот вектор перпендикулярен обоим векторам, а его длина равна произведению длины вектора $\boldsymbol{a}$ на длину высоты, опущенной на вектор $\boldsymbol{a}$ из конца вектора $\boldsymbol{u}$; согласованность ориентаций следует проверить для различных вариантов знаков чисел y и z.

Теперь требуемое равенство легко проверить, выражая координаты входящих в него векторных произведений через координаты векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Второе решение. Рассмотрим призму $ABCA_1B_1C_1$, где $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \boldsymbol{a}$. Так как $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, то указанное равенство означает, что сумма трёх векторов внешних (или внутренних) нормалей к боковым граням призмы, длины которых равны площадям соответствующих граней, равна нулю. Пусть $A'B'C'$ — сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру. После поворота векторов нормалей на 90° в плоскости $A'B'C'$ они переходят в векторы $d\overrightarrow{A'B'}$, $d\overrightarrow{B'C'}$ и $d\overrightarrow{C'A'}$, где d — длина бокового ребра призмы. Ясно, что сумма этих векторов равна нулю.

11.33. Пусть $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3$, где $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ — единичные векторы, направленные вдоль осей координат. Для решения задачи можно воспользоваться результатами задач 11.32 (а—в), предварительно заметив, что $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$.

11.34. Оба равенства можно доказать несложными, но несколько громоздкими вычислениями, воспользовавшись результатом задачи 11.33.

11.35. а) Согласно задаче 11.34 (а) получаем $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

б) Векторы $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ перпендикулярны плоскости ABC и сонаправлены, а их длины равны $2S_{BOC}$, $2S_{COA}$ и $2S_{AOB}$. Поэтому векторы $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$ и $\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ после поворота на 90° в плоскости ABC переходят в векторы $2\boldsymbol{a}S_{BOC}$, $2\boldsymbol{b}S_{COA}$ и $2\boldsymbol{c}S_{AOB}$.

11.36. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — векторы, задающие три несмежные стороны шестиугольника; $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{c}_1$ — векторы противоположных сторон. Так как вектор $\boldsymbol{a}_1$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{a}_1 = \lambda \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$. Следовательно, общий перпендикуляр к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}_1$ задаётся вектором $\boldsymbol{n}_a = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$. Из тождества Якоби следует, что $\boldsymbol{n}_a + \boldsymbol{n}_b + \boldsymbol{n}_c = \vec{0}$, т. е. эти векторы перпендикулярны одной прямой.

Замечание. В действительности верно более сильное утверждение: общие перпендикуляры к парам противоположных сторон шестиугольника имеют общий перпендикуляр. См. по этому поводу задачу 11.48. Шестиугольник, о котором идёт речь в задаче 11.36, образован прямыми a, b, c и общими перпендикулярами a', b', c' к ним.

11.37. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{DA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{DB}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{DC}$. Утверждение задачи эквивалентно равенству

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) = \vec{0}.$$

11.38. а) Докажем, например, что вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$ лежит в плоскости Π, проходящей через биссектрису грани SAB перпендикулярно этой грани. Плоскость Π перпендикулярна вектору $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, поэтому она содержит вектор $\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$. Кроме того, плоскость Π содержит вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, поэтому она содержит вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$.

б) Пусть $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1}\sin\alpha_1 + \overrightarrow{OA_2}\sin\alpha_2 + \overrightarrow{OA_3}\sin\alpha_3$. Докажем, например, что плоскость OA_2A делит пополам угол между гранями OA_2A_1 и OA_2A_3. Для этого достаточно проверить, что перпендикуляр к плоскости OA_2A является биссектрисой угла между перпендикулярами к плоскостям OA_2A_1 и OA_2A_3.

Перпендикуляры к этим трём плоскостям задаются соответственно векторами $\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_1}\sin\alpha_1+\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_3}\sin\alpha_3$, $\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_3}$. Как легко видеть, если $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, то вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ задаёт биссектрису угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Поэтому остаётся доказать, что длины векторов $\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_1}\sin\alpha_1$ и $\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_3}\sin\alpha_3$ равны. Но $|\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_1}|=\sin A_1OA_2=\sin\alpha_3$ и $|\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_3}|=$ $=\sin\alpha_1$, что и завершает доказательство. Для плоскостей OA_1A и OA_3A доказательство аналогично.

11.39. Пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{A_1B}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC_1}$ и $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{C_1D}$. Тогда удвоенные площади граней тетраэдра A_1BC_1D равны длинам векторов $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, а удвоенные площади граней параллелепипеда равны длинам векторов $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$ и $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. Пусть $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$. Тогда учетверённые суммы квадратов площадей граней тетраэдра и параллелепипеда равны $|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|^2+|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|^2$ и $|\boldsymbol{z}|^2+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2+|\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|^2$ соответственно. Легко проверить, что каждая из этих сумм равна

$$2(|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+|\boldsymbol{z}|^2-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})).$$

11.40. Воспользовавшись формулой из задачи 11.33, получаем, что смешанное произведение данных векторов равно выражению в скобках.

11.41. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда объём натянутого на них параллелепипеда равен нулю. Поэтому требуемое утверждение является частным случаем задачи 11.40.

11.42. Выберем систему координат так, чтобы вершина D была расположена на оси Oz, а вершины A, B и C были расположены в координатной плоскости Oxy. Тогда можно считать, что вершины A, B, C и D имеют координаты $(x, y, 0)$, $(x, y+c', 0)$, $(\xi, v, 0)$ и $(0, 0, z)$ соответственно. Векторы сторон рассматриваемого параллелограмма имеют координаты $\left(0, \frac{c'}{2}, 0\right)$ и $\left(-\frac{\xi}{2}, -\frac{v}{2}, \frac{z}{2}\right)$. Его площадь равна длине векторного произведения этих векторов, поэтому согласно задаче 11.33 она равна длине вектора $\left(\frac{zc'}{4}, 0, \frac{\xi c'}{4}\right)$. Длина этого вектора равна $\frac{c'}{4}\sqrt{z^2+\xi^2}$. Теперь нужно выразить $z^2+\xi^2$ через длины рёбер тетраэдра. Для этого выразим длины рёбер через координаты вершин:

$$a^2=x^2+y^2+z^2, \tag{1}$$

$$b^2=x^2+(y+c')^2+z^2, \tag{2}$$

$$c^2=\xi^2+v^2+z^2, \tag{3}$$

$$a'^2=(x-\xi)^2+(y+c'-v)^2, \tag{4}$$

$$b'^2=(x-\xi)^2+(y-v)^2. \tag{5}$$

Вычтем уравнение (1) из уравнения (2). Полученное уравнение можно записать в виде

$$2yc'=b^2-a^2-c'^2.$$

Вычтем уравнение (5) из уравнения (4), подставим в новое уравнение только что полученное выражение для $2yc'$, а затем выразим v через остальные переменные:

$$v = \frac{1}{2c'}(b^2 + b'^2 - a^2 - a'^2).$$

Остаётся заметить, что $z^2 + \xi^2 = c^2 - v^2$ согласно уравнению (3).

11.43. Выясним, как устроено множество точек, заданных уравнением $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Пусть $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ для некоторого вектора $\boldsymbol{x}_0$ (ясно, что такой вектор найдётся для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a} \neq \overrightarrow{0}$). Тогда равенство $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ эквивалентно тому, что разность $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ пропорциональна вектору $\boldsymbol{a}$. Таким образом, рассматриваемое уравнение задаёт прямую $\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}$.

Чтобы подобрать векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ так, чтобы получилось уравнение, задающее прямую l, нужно взять на прямой l две точки A_1 и A_2 и положить $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \overrightarrow{OA_1}$, где O — начало координат.

11.44. Предположим сначала, что $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}'$, т. е. рассматриваемые прямые имеют общую точку — конец вектора $\boldsymbol{x}_0$. Тогда

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}') + (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}_0).$$

Таким образом, рассматриваемая сумма скалярных произведений равна сумме смешанных произведений троек векторов $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{a}'$. Эти две тройки отличаются друг от друга только ориентацией, поэтому сумма их смешанных произведений равна нулю.

Предположим теперь, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}') + (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) = 0$. Выберем на первой прямой точку $\boldsymbol{x}$, а на второй прямой точку $\boldsymbol{x}'$. Тогда $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}'$, поэтому

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}') + (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{x}') + (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{x}') - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{x}) = \\ = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \times (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})).$$

Таким образом, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \times (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})) = 0$. Это означает, что $\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda'\boldsymbol{a}'$ для некоторых чисел λ и λ'. Следовательно, $\boldsymbol{x}' - \lambda'\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{a}$ — искомая точка пересечения.

11.45. Ясно, что прямая $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ перпендикулярна обеим данным прямым, поэтому нужно лишь проверить, что она их пересекает; достаточно проверить, что она пересекает прямую $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$. Согласно задаче 11.44 для этого нужно проверить равенство $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) = 0$. Здесь $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1) = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$. Вектор $\boldsymbol{b}$ получается из вектора $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ добавлением вектора, пропорционального $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$. Но скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ равно нулю, поэтому $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{a}_2)$. Остаётся заметить, что $(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{a}_2) = 0$.

11.46. Предположим сначала, что $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}' \perp \boldsymbol{b}'$. Тогда парам $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ и $(\boldsymbol{a}'; \boldsymbol{b}')$ сопоставлены прямые $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$, а произведению пар сопоставлена прямая

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}') \times \boldsymbol{x} = \mathrm{pr}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}').$$

Согласно задаче 11.45 эта прямая является общим перпендикуляром к паре исходных прямых.

Для любой пары векторов $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ можно выбрать пару векторов $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}_1)$ так, что $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}_1 \perp \boldsymbol{a}$. Для этого достаточно положить $\lambda = -\dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}$, где круглые скобки обозначают, как обычно, скалярное произведение. Новая пара задаёт ту же самую прямую, поскольку $\boldsymbol{b}_1$ — проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{a}$. Аналогично выберем для пары векторов $(\boldsymbol{a}'; \boldsymbol{b}')$ пару векторов $(\boldsymbol{a}'; \boldsymbol{b}_1')$ так, что $\boldsymbol{b}_1' = \boldsymbol{b}' + \lambda'\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}_1' \perp \boldsymbol{a}'$.

Пусть $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}'; \boldsymbol{b}') = (\boldsymbol{a}''; \boldsymbol{b}'')$. Тогда

$$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}_1) \times (\boldsymbol{a}'; \boldsymbol{b}_1') = (\boldsymbol{a}''; \boldsymbol{b}_1''),$$

где

$$\boldsymbol{b}_1'' = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b}' + \lambda'\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}'' + (\lambda + \lambda')\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}'' + (\lambda + \lambda')\boldsymbol{a}''.$$

Проекции векторов $\boldsymbol{b}'' + (\lambda + \lambda')\boldsymbol{a}''$ и $\boldsymbol{b}''$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{a}''$, совпадают, поэтому произведения $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}'; \boldsymbol{b}')$ и $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}_1) \times (\boldsymbol{a}'; \boldsymbol{b}_1')$ задают одну и ту же прямую, а для произведения $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}_1) \times (\boldsymbol{a}'; \boldsymbol{b}_1')$ мы уже проверили, что эта прямая — общий перпендикуляр к прямым, соответствующим парам $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}_1)$ и $(\boldsymbol{a}'; \boldsymbol{b}_1')$. Ясно также, что парам $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ и $(\boldsymbol{a}'; \boldsymbol{b}')$ соответствуют те же самые прямые.

11.47. Рассмотрим три пары векторов $A = (\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a}')$, $B = (\boldsymbol{b}; \boldsymbol{b}')$ и $C = (\boldsymbol{c}; \boldsymbol{c}')$. В таких обозначениях $A \times B = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}; \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b})$. Требуется доказать, что $A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = (0; 0)$. Для первых векторов пар мы получаем обычное тождество Якоби. Для вторых векторов в парах нужно доказать, что сумма

$$\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}') + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}' \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}') + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c}' \times \boldsymbol{a}) + \\ + \boldsymbol{b}' \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}') + \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}' \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

обращается в нуль. Эту сумму легко представить в виде трёх сумм, каждая из которых обращается в нуль согласно обычному тождеству Якоби.

11.48. Пусть прямые a, b и c задаются парами векторов $A = (\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a}')$, $B = (\boldsymbol{b}; \boldsymbol{b}')$ и $C = (\boldsymbol{c}; \boldsymbol{c}')$. Тогда прямые a', b' и c' задаются парами векторов $B \times C$, $C \times A$ и $B \times C$, а прямые a'', b'' и c'' задаются парами векторов $A'' = A \times (B \times C)$, $B'' = B \times (C \times A)$ и $C'' = C \times (B \times A)$. Согласно тождеству Якоби (задача 11.47) $A'' + B'' + C'' = (0, 0)$. В таком случае прямые a'', b'' и c'' имеют общий перпендикуляр, поскольку $B'' \times C'' = B'' \times (-A'' - B'') = A'' \times B''$ и $C'' \times A'' = A'' \times B''$.

11.49. Пусть $\overrightarrow{XP} = \lambda_1\overrightarrow{XA_1} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{XA_n}$ и $\overrightarrow{X'P'} = \lambda_1\overrightarrow{X'A_1} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{X'A_n}$. Точки P и P' совпадают тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{P'X'} = \overrightarrow{XX'}$. С другой стороны,

$$\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{P'X'} = \lambda_1(\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{A_1X'}) + \ldots + \lambda_n(\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{A_1X'}) = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\overrightarrow{XX'}.$$

Поэтому положение точки P не зависит от выбора точки X тогда и только тогда, когда $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$.

11.50. Пусть α и β — неотрицательные числа, сумма которых равна 1. Тогда точка $P = \alpha A + \beta B$ лежит на отрезке AB и делит его в отношении $AP : PB = \beta : \alpha$. Более того, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ — неотрицательные числа, сумма которых равна 1, то точка $P = \sum \alpha_i A_i + \sum \beta_j B_j$ лежит на отрезке AB и делит его в отношении $AP : PB = \beta : \alpha$; здесь $\alpha = \sum \alpha_i$, $\beta = \sum \beta_j$, $A = \sum \frac{\alpha_i}{\alpha} A_i$ и $B = \sum \frac{\beta_j}{\beta} B_j$. Таким образом, точку $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n$ можно найти по индукции, причём на каждом шаге мы будем выбирать точку отрезка, принадлежащего выпуклой оболочке точек $A_1, \ldots, A_n$.

Наоборот, если задана точка, принадлежащая выпуклой оболочке точек $A_1, \ldots, A_n$, то мы можем провести через неё отрезок, концы которого принадлежат граням, через его концы можно провести отрезки, концы которых принадлежат рёбрам, а через концы этих отрезков провести отрезки, концы которых являются вершинами. Так мы получим требуемое представление данной точки в виде $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n$ (такое представление не единственно).

11.51. Предположим, например, что $\lambda_1 > \frac{1}{2}$. Тогда

$$|\lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n| = |-\lambda_1 \boldsymbol{v}_1| > \frac{1}{2}.$$

С другой стороны,

$$|\lambda_2 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n| \leqslant \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1 - \lambda_1 < \frac{1}{2}.$$

Приходим к противоречию. Если $\lambda_i > \frac{1}{2}$ для $i \neq 1$, то рассуждения аналогичны.

11.52. Введём обозначение $\boldsymbol{v}_i = \overrightarrow{OA_i}$.

а) Согласно задаче 11.50 для некоторой выпуклой линейной комбинации получаем $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \vec{0}$. Для такой выпуклой линейной комбинации все λ_i не превосходят $\frac{1}{2}$ согласно задаче 11.51. Поэтому

$$\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_n = (1 - 2\lambda_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + (1 - 2\lambda_n)\boldsymbol{v}_n,$$

где все коэффициенты $1 - 2\lambda_i$ неотрицательны. Следовательно,

$$|\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_n| \leqslant (1 - 2\lambda_1) + \ldots + (1 - 2\lambda_n) = n - 2.$$

б) Ясно, что

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j|^2 = n(n-1) - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$$

и

$$|\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_n|^2 = n + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j).$$

Поэтому

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j|^2 = n^2 - |\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_n|^2.$$

Остаётся заметить, что $|\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_n| \leqslant n - 2$ согласно задаче (а).

в) Достаточно заметить, что $2|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j| \geqslant |\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|^2$, поскольку $|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j| \leqslant 2$, и воспользоваться неравенством из задачи (б).

11.53. Фиксируем в пространстве точку O и сопоставим каждому направлению в пространстве конец X единичного вектора $\overrightarrow{OX}$, соответствующего этому направлению. В результате получим сферу радиуса 1 с центром O. Интересующая нас функция f равна длине проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на луч OX. Чтобы определить её среднее значение, нужно разбить сферу на достаточно мелкие области и рассмотреть сумму $\sum\limits_k f(X_k)\Delta S_k$, где X_k — точка k-й области, ΔS_k — площадь этой области. Затем нужно вычислить предел таких сумм при измельчении разбиения и поделить этот предел на площадь поверхности сферы, т. е. на 4π. Вместо разбиения сферы на мелкие области можно также рассматривать выпуклые многогранники, достаточно хорошо приближающие данную сферу. При этом можно считать, что для грани M_k точка X_k определяется как конец вектора $\overrightarrow{OX}_k$, перпендикулярного M_k. В таком случае $f(X_k)=a\Delta S_k|\cos\varphi_k|$, где ΔS_k — площадь грани M_k, а φ_k — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OX}_k$. Легко проверить, что $\Delta S_k|\cos\varphi_k|=\Delta S'_k$, где $\Delta S'_k$ — площадь проекции грани M_k на плоскость, ортогональную вектору $\boldsymbol{a}$. Таким образом, рассматриваемая сумма $\sum\limits_k f(X_k)\Delta S_k$ равна сумме площадей проекций граней многогранника на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{a}$. В пределе эта сумма равна удвоенной площади сечения сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. Таким образом, среднее значение длины проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на прямые в пространстве равно $2a\dfrac{S_1}{S_2}$, где S_1 — площадь экваториального сечения сферы, S_2 — площадь поверхности сферы. Для сферы единичного радиуса $S_1=\pi$ и $S_2=4\pi$, поэтому среднее значение равно $\dfrac{a}{2}$.

11.54. Для каждой грани выпуклого многогранника рассмотрим перпендикулярный ей вектор, длина которого равна площади этой грани. Площадь проекции грани на плоскость П равна длине проекции рассматриваемого вектора на прямую, перпендикулярную плоскости П. Сумма площадей проекций граней выпуклого многогранника на плоскость П равна удвоенной площади его проекции на плоскость П. Поэтому сумма длин проекций на любую прямую рассматриваемых векторов для внутреннего многогранника меньше, чем для внешнего. Но тогда согласно задаче 11.53 сумма длин векторов для внутреннего многогранника меньше, чем для внешнего, т. е. сумма площадей граней внутреннего многогранника меньше, чем сумма площадей граней внешнего многогранника.

З а м е ч а н и е. По поводу другого доказательства см. задачу 15.30.

11.55. Для каждой грани выпуклого многогранника рассмотрим перпендикулярный ей вектор, длина которого равна площади этой грани. Площадь проекции грани на плоскость П равна длине проекции рассматриваемого вектора на прямую, перпендикулярную плоскости П. Сумма площадей проекций граней выпуклого многогранника на плоскость П равна удвоенной площади его проекции на плоскость П. Поэтому сумма длин проекций на любую прямую для рассматриваемых векторов не превосходит 2, а значит, среднее значение суммы длин проекций тоже на превосходит 2. Согласно задаче 11.53 это среднее значение равно $\frac{a}{2}$, где a — сумма длин рассматриваемых векторов, т. е. площадь поверхности многогранника. Таким образом, $\frac{a}{2} \leqslant 2$, т. е. $a \leqslant 4$, что и требовалось.

11.56. Согласно задаче 11.53 среднее значение суммы длин проекций данных векторов равно $\frac{L}{2}$. Поэтому существует прямая, сумма длин проекций данных векторов на которую не меньше $\frac{L}{2}$. Введём на этой прямой направление и рассмотрим отдельно векторы с положительными проекциями и векторы с отрицательными проекциями. Для одного из этих наборов сумма длин проекций не меньше $\frac{L}{4}$, но тогда сумма длин векторов этого набора не меньше $\frac{L}{4}$.

11.57. а) Пусть проекция тетраэдра на некоторую прямую представляет собой отрезок длины L, причём проекции вершин разбивают этот отрезок на отрезки длины x_1, x_2 и x_3 (средний отрезок имеет длину x_2). Тогда сумма длин проекций рёбер равна $3L + x_2$. Поэтому сумма длин проекций рёбер заключена между $3L$ и $4L$.

Пусть длины проекций внутреннего и внешнего тетраэдров на некоторую прямую равны L_1 и L_2, а суммы длин проекций их рёбер равны d_1 и d_2. Тогда $3d_1 \leqslant L_1 \leqslant L_2 \leqslant 4d_2$, поэтому $\frac{d_1}{d_2} \leqslant \frac{4}{3}$. Согласно задаче 11.53 из этого неравенства для сумм длин проекций рёбер следует такое же неравенство для сумм длин рёбер.

б) Рассмотрим отрезок длины 1 и рассмотрим один тетраэдр, у которого две вершины расположены вблизи одного конца отрезка и две вершины вблизи другого конца, и другой тетраэдр, у которого три вершины расположены вблизи одного конца отрезка и одна вершина вблизи другого конца. Сумма длин рёбер первого тетраэдра может быть сколь угодно близка к 4, а второго тетраэдра — к 3. При этом вершины можно выбрать так, чтобы первый тетраэдр располагался внутри второго.

11.58. Как и при решении задачи 11.57 (а), достаточно доказать требуемое неравенство для проекций данных многогранников на прямую. Докажем, что если на отрезке длины d расположены k точек, причём концы отрезка входят в эту систему k точек, то минимальная сумма попарных расстояний между данными точками равна $(k-1)d$, а максимальная сумма попарных расстояний между точками равна $k^2\frac{d}{4}$ при чётном k и $(k^2-1)\frac{d}{4}$ при нечётном k.

Пусть A и B — концы рассматриваемого отрезка. Для любой точки X этого отрезка выполняется равенство $AX + BX = d$, поэтому сумма попарных расстояний между данными точками равна $(k-1)d + \Sigma$, где Σ — сумма попарных расстояний для системы из $k-2$ точек, которая получается из данной системы точек после выбрасывания точек A и B. Минимальное значение Σ равно 0; оно достигается в том случае, когда все $k-2$ точки сосредоточены в одном из концов отрезка AB. Максимальное значение Σ может получиться лишь в том случае, когда в новую систему из $k-2$ точек входят обе точки A и B (мы предполагаем, что $k-2 \geqslant 2$). Снова выбросим точки A и B и рассмотрим систему из $k-4$ точек и т. д. В итоге получаем, что если $k=2s$, то сумма попарных расстояний максимальна в том случае, когда s точек расположены в одном конце отрезка и s точек расположены в другом конце отрезка; эта сумма равна $s^2 d = k^2 \frac{d}{4}$. Если же $k=2s+1$, то в одном конце отрезка должно быть расположено s точек, а в другом $s+1$ точка; в этом случае сумма равна $s(s+1)d = (k^2-1)\frac{d}{4}$.

11.59. Требуемое неравенство достаточно доказать для проекций векторов на любую прямую, т. е. просто для чисел. Это сделано в решении задачи 13.46 из книги «Задачи по планиметрии» (для удобства там введён вектор $\boldsymbol{d} = -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$).

ГЛАВА 12

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Параллельный перенос

12.1. Рассмотрим четыре тетраэдра T_a, T_b, T_c и T_d, вершинами каждого из которых служит одна вершина тетраэдра $ABCD$ и середины трёх выходящих из неё рёбер. Пусть O_a, O_b, O_c и O_d — центры описанных сфер этих тетраэдров, I_a, I_b, I_c и I_d — центры вписанных сфер. Докажите, что тетраэдры $O_aO_bO_cO_d$ и $I_aI_bI_cI_d$ равны.

12.2. Отрезок A_1A_2 пересекает параллельные плоскости Π_1 и Π_2, причём точка A_1 расположена ближе к плоскости Π_1, чем к плоскости Π_2. В плоскостях Π_1 и Π_2 выбраны точки M_1 и M_2 так, что отрезок M_1M_2 перпендикулярен обеим плоскостям и ломаная $A_1M_1M_2A_2$ имеет наименьшую возможную длину. Докажите, что прямые A_1M_1 и A_2M_2 параллельны.

12.3. Какое наибольшее число точек можно расположить в пространстве так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой и ни один из треугольников с вершинами в этих точках не был тупоугольным?

См. также задачу 17.15.

§ 2. Симметрия относительно точки

Симметрией относительно точки A называют преобразование пространства, переводящее точку X в такую точку X', что A — середина отрезка XX'. Другие названия этого преобразования — *центральная симметрия с центром* A или просто *симметрия с центром* A.

12.4. В пространстве даны точки O_1, O_2, O_3 и точка A. Точка A симметрично отражается относительно точки O_1, полученная точка A_1 — относительно O_2, полученная точка A_2 — относительно O_3. В результате получаем точку A_3, которую тоже последовательно отражаем относительно O_1, O_2, O_3. Докажите, что полученная при этом точка совпадает с A.

12.5. Даны тетраэдр и точка N. Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная отрезку, соединяющему точку N с серединой противоположного ребра. Докажите, что все шесть этих плоскостей пересекаются в одной точке.

См. также задачи 8.64, 8.65, 15.42.

§ 3. Симметрия относительно прямой

Симметрией относительно прямой l называют преобразование пространства, переводящее точку X в такую точку X', что прямая l проходит через середину отрезка XX' перпендикулярно ему. Это преобразование называют также *осевой симметрией*, а прямую l называют *осью симметрии*.

12.6. Докажите, что при симметрии относительно прямой, заданной вектором $\boldsymbol{b}$, вектор $\boldsymbol{a}$ переходит в вектор

$$2\boldsymbol{b}\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})} - \boldsymbol{a}.$$

12.7. Перпендикулярные прямые l_1 и l_2 пересекаются в одной точке. Докажите, что композиция симметрий относительно этих прямых является симметрией относительно прямой, перпендикулярной им обеим.

См. также задачи 1.34, 12.30, 12.31.

§ 4. Оси симметрии

12.8. В тетраэдре $ABCD$ длины всех рёбер, кроме AB и CD, равны. Докажите, что прямая, проходящая через середины рёбер AB и CD, является осью симметрии этого тетраэдра.

12.9. Какое наибольшее число осей симметрии может иметь пространственная фигура, состоящая из трёх прямых, из которых никакие две не параллельны и не совпадают?

12.10. Докажите, что никакое тело в пространстве не может иметь ненулевое чётное число осей симметрии.

§ 5. Симметрия относительно плоскости

Симметрией относительно плоскости Π называют преобразование пространства, переводящее точку X в такую точку X', что плоскость Πпроходит через середину отрезка XX' перпендикулярно ему. Другое название этого преобразования — *зеркальная симметрия*.

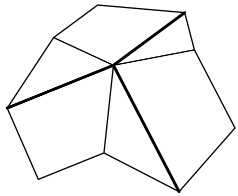


Рис. 12.1

12.11. Три равных правильных пятиугольника расположены в пространстве так, что они имеют общую вершину и каждые два из них имеют общее ребро. Докажите, что выделенные на рис. 12.1 отрезки являются рёбрами прямого трёхгранного угла.

12.12. Даны две пересекающиеся плоскости и касающаяся их сфера. Рассматриваются все сферы, касающиеся этих плоскостей и данной сферы. Найдите геометрическое место точек касания сфер.

12.13. Пусть O — центр цилиндра (т. е. середина его оси), AB — диаметр одного основания, C — точка окружности другого основания. Докажите, что сумма двугранных углов трёхгранного угла $OABC$ с вершиной O равна 2π.

12.14. В выпуклой пятигранной пирамиде $SABCDE$ равны боковые рёбра и двугранные углы при боковых рёбрах. Докажите, что эта пирамида правильная.

12.15. На рёбрах $A'B'$ и $C'D'$ куба $ABCDA'B'C'D'$ выбраны точки K и M так, что плоскость KDM касается вписанного в куб шара. Докажите, что величина двугранного угла при ребре $B'D$ тетраэдра $B'DKM$ не зависит от выбора точек K и M. Найдите эту величину.

См. также задачу 17.11.

§ 6. Плоскости симметрии

12.16. Какое наибольшее число плоскостей симметрии может иметь пространственная фигура, состоящая из трёх попарно не параллельных прямых?

12.17. Сколько плоскостей симметрии может иметь треугольная пирамида?

§ 7. Гомотетия

Гомотетией называют преобразование пространства, переводящее точку X в точку X', обладающую тем свойством, что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ (точка O и число k фиксированы). Точку O называют *центром гомотетии*, а число k — *коэффициентом гомотетии*.

12.18. Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной сфер тетраэдра. Докажите, что $R \geqslant 3r$.

12.19. Соответственные плоскости граней двух не совпадающих тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны. Докажите, что прямые, соединяющие соответственные вершины этих тетраэдров, пересекаются в одной точке (или параллельны).

12.20. Даны четыре попарно параллельные плоскости. Всегда ли можно выбрать по одной точке на каждой из этих плоскостей так, чтобы они были вершинами правильного тетраэдра?

12.21. В плоскости боковой грани правильной четырёхугольной пирамиды взята произвольная фигура F. Пусть F_1 — проекция F на основание пирамиды, а F_2 — проекция F_1 на боковую грань, смежную с исходной. Докажите, что фигуры F и F_2 подобны.

12.22. Докажите, что внутри любого выпуклого многогранника M можно разместить два многогранника, подобных ему с коэффициентом $\frac{1}{2}$, так, чтобы они не пересекались (т. е. не имели общих внутренних точек).

12.23. Докажите, что выпуклый многогранник нельзя покрыть тремя многогранниками, гомотетичными ему с коэффициентом k, где $0 < k < 1$.

12.24. На плоскости дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек D пространства, что отрезок OM, где O — центр описанной сферы тетраэдра $ABCD$, M — центр масс этого тетраэдра, перпендикулярен плоскости ADM.

См. также задачи 8.51, 8.52, 12.3, 17.15, 18.5.

§ 8. Поворот вокруг прямой

Поворот вокруг прямой l на угол φ — это преобразование пространства, при котором в каждой плоскости, перпендикулярной прямой l, происходит поворот на угол φ вокруг точки пересечения прямой и плоскости. Прямую l называют при этом *осью поворота*.

Осью вращения тела называют прямую, после поворота вокруг которой на любой угол тело совмещается само с собой.

12.25. Докажите, что преобразование, заданное формулой $(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$, является поворотом на 120° вокруг некоторой оси.

12.26. Пусть A_i' и A_i'' — проекции вершин тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ на плоскости Π' и Π''. Докажите, что плоскость Π'' можно так переместить в пространстве (вместе с точками A_i'' на ней), что четыре прямые $A_i'A_i''$ станут параллельны.

12.27. Как расположены плоскости симметрии ограниченного тела, если оно имеет две оси вращения?

§ 9. Композиции преобразований

Композицией преобразований F и G называют преобразование $G \circ F$, переводящее точку X в точку $G(F(X))$.

12.28. Докажите, что композиция симметрий относительно двух плоскостей, пересекающихся по прямой l, является поворотом относительно прямой l, причём угол этого поворота в два раза больше угла поворота относительно прямой l, переводящего первую плоскость во вторую.

12.29. Докажите, что композиция симметрии относительно точки O и поворота относительно прямой l, проходящей через O, является также и композицией некоторого поворота относительно прямой l и симметрии относительно плоскости Π, проходящей через точку O перпендикулярно l.

Винтовым движением с осью l и углом поворота φ называют композицию поворота на угол φ вокруг прямой l и параллельного переноса на вектор, параллельный прямой l.

12.30. Докажите, что композиция симметрий относительно двух скрещивающихся прямых a и b является винтовым движением, ось которого — общий перпендикуляр к этим прямым, а угол поворота равен удвоенному углу между прямыми a и b, причём длина вектора параллельного переноса равна удвоенному расстоянию между прямыми a и b.

12.31. Докажите, что композиция симметрий относительно трёх скрещивающихся прямых a, b и c является симметрией относительно некоторой прямой тогда и только тогда, когда все три прямые имеют общий перпендикуляр.

§ 10. Классификация движений

Движением называют такое преобразование пространства, что если A' и B' — образы точек A и B, то $AB = A'B'$, т. е. движение — это преобразование пространства, сохраняющее расстояния.

Движение, оставляющее неподвижными четыре точки пространства, не лежащие в одной плоскости, оставляет неподвижными и все остальные точки пространства. Поэтому любое движение задаётся образами четырёх точек, не лежащих в одной плоскости.

12.32. а) Докажите, что любое движение пространства является композицией не более чем четырёх симметрий относительно плоскостей.

б) Докажите, что любое движение пространства, имеющее неподвижную точку O, является композицией не более чем трёх симметрий относительно плоскостей.

Движение, являющееся композицией чётного числа симметрий относительно плоскостей, называют движением *первого рода* или движением, *сохраняющим ориентацию* пространства. Движение, являющееся композицией нечётного числа симметрий относительно плоскостей, называют движением *второго рода* или движением, *изменяющим ориентацию* пространства.

Мы не будем доказывать, что композицию чётного числа симметрий относительно плоскостей нельзя представить в виде композиции нечётного числа симметрий относительно плоскостей.

12.33. а) Докажите, что любое движение первого рода, имеющее неподвижную точку, является поворотом относительно некоторой оси.

б) Докажите, что любое движение второго рода, имеющее неподвижную точку, является композицией поворота относительно некоторой оси (возможно, на нулевой угол) и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной этой оси.

12.34. Шар, лежащий в углу прямоугольной коробки, перекатывается вдоль стенки коробки в другой угол, причём боковой стенки всегда касается одна и та же точка шара. Из второго угла шар перекатывается в третий, затем в четвёртый и наконец возвращается в исходный угол. При этом некоторая точка X поверхности шара переходит в точку X_1. После такого же перекатывания точка X_1 переходит в X_2, а X_2 в X_3. Докажите, что точки X, X_1, X_2 и X_3 лежат в одной плоскости.

§ 11. Отражения лучей света

12.35. Луч света входит в прямой трёхгранный угол и отражается от всех трёх граней по одному разу. Докажите, что при этом он просто изменит направление.

12.36. Луч света падает на плоское зеркало под углом α. Зеркало повернули на угол β вокруг проекции луча на зеркало. На какой угол отклонится при этом отражённый луч?

12.37. Плоскость Π проходит через вершину конуса перпендикулярно его оси; точка A лежит в плоскости Π. Пусть M — такая точка конуса, что луч света, идущий из A в M, зеркально отразившись от поверхности конуса, станет параллелен плоскости Π. Найдите геометрическое место проекций точек M на плоскость Π.

Решения

12.1. Тетраэдры T_a, T_b, T_c и T_d получаются друг из друга параллельным переносом (на вектор, равный половине вектора ребра тетраэдра $ABCD$). Поэтому при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{O_aI_b}$ тетраэдр $O_aO_bO_cO_d$ переходит в тетраэдр $I_aI_bI_cI_d$.

12.2. Рассмотрим параллельный перенос, переводящий точку M_2 в точку M_1. При этом переносе отрезок A_2M_2 переходит в отрезок $A_2'M_1$, поэтому длина рассматриваемой ломаной складывается из постоянной величины M_1M_2 и суммы $A_2'M_1 + M_1A_1 \geqslant A_2'A_1$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда точка M_1 лежит на отрезке $A_2'A_1$; в этом случае обе прямые A_1M_1 и A_2M_2 параллельны прямой $A_2'A_1$. (Из условий, наложенных на взаимное расположение точек A_1 и A_2 и плоскостей Π_1 и Π_2, следует, что отрезок $A_2'A_1$ пересекает плоскость Π_1.)

12.3. Ответ: 8 точек. В качестве требуемой системы точек можно взять вершины куба. Докажем, что больше 8 точек так расположить нельзя. Пусть точки $A_1, \ldots, A_n$ удовлетворяют требуемому условию. Возьмём две точки A_i и A_j и рассмотрим множество всех точек X, для которых $\angle XA_iA_j \leqslant 90^\circ$ и $\angle XA_jA_i \leqslant 90^\circ$. Это множество представляет собой полосу Π_{ij}, заключённую между двумя параллельными плоскостями, которые перпендикулярны отрезку A_iA_j и проходят через его концы.

Пусть P — выпуклая оболочка точек $A_1, \ldots, A_n$. Тогда все точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на границе многогранника P. Действительно, P содержится в полосе Π_{ij}, поэтому точки A_i и A_j не могут быть внутренними точками многогранника P.

Наряду с многогранником P рассмотрим многогранники $P_1, \ldots, P_n$, где P_i получается из P переносом на вектор $\overrightarrow{A_1A_i}$ (ясно, что P_1 совпадает с P). Докажем два свойства этих многогранников.

1. *Никакие два из многогранников $P_1, \ldots, P_n$ не имеют общих внутренних точек.* Действительно, исходный многогранник P лежит в полосе Π_{ij}, поэтому многогранники P_i и P_j лежат в полосах, которые получаются из полосы Π_{ij} переносами на векторы $\overrightarrow{A_1A_i}$ и $\overrightarrow{A_1A_j}$. Эти две полосы получаются друг из друга переносом на вектор $\pm\overrightarrow{A_iA_j}$, поэтому они не имеют общих внутренних точек.

2. *Все многогранники $P_1, \ldots, P_n$ лежат в многограннике P', который получается из многогранника P гомотетией с центром A_1 и коэффициентом* 2. Действительно, пусть при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{A_1A_i}$ точка X многогранника P переходит в точку X_i многогранника P_i. Тогда $A_1A_iXX_i$ — параллелограмм, поэтому середина отрезка A_1X_i совпадает с серединой отрезка A_iX, а значит, она принадлежит многограннику P, так как многогранник P выпуклый, а точки A_i и X ему принадлежат.

Из свойств 1 и 2 следует, что $n \leqslant 8$. Действительно, пусть объём многогранника P равен V. Тогда объём многогранника P' равен $8V$, а объём каждого из многогранников $P_1, \ldots, P_n$ равен V. Поэтому $nV \leqslant 8V$, т. е. $n \leqslant 8$.

12.4. Легко проверить, что $\overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$, $\overrightarrow{A_2A_4} = 2\overrightarrow{O_3O_1}$ и $\overrightarrow{A_4A_6} = 2\overrightarrow{O_2O_3}$. Поэтому $\overrightarrow{AA_6} = \overrightarrow{0}$, т. е. $A = A_6$.

12.5. Пусть M — центр масс тетраэдра, A — середина ребра, через которое проходит плоскость Π, B — середина противоположного ребра, N' — точка, симметричная N относительно точки M. Так как точка M является серединой отрезка AB (см. задачу 18.3), то $AN' \parallel BN$, а значит, точка N' принадлежит плоскости Π. Следовательно, все шесть плоскостей проходят через точку N'.

12.6. Пусть $\boldsymbol{a}'$ — образ вектора $\boldsymbol{a}$ при рассматриваемой симметрии; $\boldsymbol{u}$ — проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на данную прямую. Тогда $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = 2\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}\dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})}$.

12.7. Введём в пространстве систему координат, взяв прямые l_1 и l_2 в качестве осей Ox и Oy. При симметрии относительно прямой Ox точка (x, y, z) переходит в точку $(x, -y, -z)$, а при симметрии относительно прямой Oy полученная точка переходит в точку $(-x, -y, z)$. В результате мы получаем симметрию относительно оси Oz.

12.8. Пусть M и N — середины рёбер AB и CD. Тогда $AN \perp CD$ и $BN \perp CD$, поэтому плоскость ABN перпендикулярна прямой CD. В частности, $MN \perp CD$. Аналогично $MN \perp AB$.

12.9. Ответ: 9. Пространственная фигура, состоящая из двух не параллельных и не совпадающих прямых l_1 и l_2, имеет ровно три оси симметрии. Действительно, рассмотрим плоскость Π, параллельную прямым l_1 и l_2 и равноудалённую от них (в случае пересекающихся прямых это будет содержащая их плоскость). Осями симметрии будут две биссектрисы углов, образованных ортогональными проекциями прямых l_1 и l_2 на плоскость Π, и прямая, ортогональная плоскости Π и проходящая через точку пересечения проекций.

Ось симметрии фигуры, состоящей из трёх прямых, является также осью симметрии некоторых двух из этих прямых. Из трёх прямых можно выбрать три пары прямых. Поэтому количество осей симметрии фигуры, состоящей из трёх прямых, не превосходит 9. Ясно также, что фигура, состоящая из трёх взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через одну точку, имеет ровно 9 осей симметрии.

Замечание. Ср. с задачей 12.16.

12.10. Фиксируем какую-нибудь ось симметрии l. Докажем, что остальные оси симметрии разбиваются на пары. Заметим сначала, что при симметрии относительно прямой l ось симметрии переходит в ось симметрии. Если ось симметрии l' не пересекает l или пересекает не под прямым углом, то парой к l' будет ось, симметричная ей относительно l. А если ось l' пересекает l под прямым углом, то парой к l' будет прямая, перпендикулярная l и l' и проходящая через точку их пересечения. В самом деле, из задачи 12.7 следует, что эта прямая является осью симметрии.

12.11. Докажем, что $\angle ABC = 90^\circ$ (рис. 12.2). Рассмотрим для этого пунктирные отрезки $A'B'$ и $B'C$. Ясно, что при симметрии относительно плоскости, проходящей через середину отрезка BB' и перпендикулярной ему, отрезок AB переходит в $A'B'$, а BC — в $B'C$. Поэтому достаточно доказать, что $\angle A'B'C = 90^\circ$. Далее, $B'C \parallel BF$, т. е. нужно доказать, что $A'B' \perp BF$. При симметрии относительно биссекторной плоскости двугранного угла, образованного пятиугольниками с общим ребром BF, точка A' переходит в B'. Поэтому отрезок $A'B'$ перпендикулярен этой плоскости, в частности $A'B' \perp BF$.

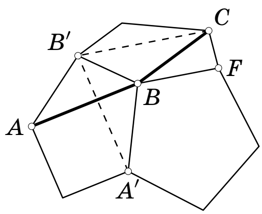


Рис. 12.2

Для остальных углов между рассматриваемыми отрезками доказательство проводится аналогично.

12.12. Предположим сначала, что и данная сфера, и сфера, касающаяся её, расположены в одном и том же двугранном угле между данными плоскостями. Тогда обе сферы симметричны относительно биссекторной плоскости этого двугранного угла, а значит, точка их касания лежит в этой плоскости. Если же данная сфера и сфера, касающаяся её, расположены в разных двугранных углах, то их общей точкой может быть лишь одна из двух точек касания данной сферы с данными плоскостями. Таким образом, искомое ГМТ состоит из окружности, по которой данную сферу пересекает биссекторная плоскость, и двух точек касания данной сферы с данными плоскостями (легко проверить, что все эти точки действительно принадлежат искомому ГМТ).

12.13. Пусть α, β и γ — двугранные углы при рёбрах OA, OB и OC. Рассмотрим точку C', симметричную C относительно O. В трёхгранном угле $OABC'$ двугранные углы при рёбрах OA, OB и OC' равны $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ и γ. Плоскость OMC', где M — середина отрезка AB, разбивает двугранный угол при ребре OC' на два двугранных угла. Так как трёхгранные углы $OAMC'$ и $OBMC'$ симметричны относительно плоскостей OMP и OMQ, где P и Q — середины отрезков AC' и BC', то указанные двугранные углы при ребре OC' равны $\pi - \alpha$ и $\pi - \beta$. Следовательно,

$$\gamma = (\pi - \alpha) + (\pi - \beta),$$

что и требовалось.

12.14. Пусть O — проекция вершины S на плоскость основания пирамиды. Так как вершины основания пирамиды равноудалены от точки S, то они равноудалены и от точки O, а значит, они лежат на одной окружности с центром O. Докажем теперь, что $BC = AE$. Пусть M — середина стороны AB. Так как $MO \perp AB$ и $SO \perp AB$, то отрезок AB перпендикулярен плоскости SMO, а значит, при симметрии относительно плоскости SMO отрезок SA переходит в отрезок SB. Двугранные углы при рёбрах SA и SB равны, поэтому плоскость SAE при этой симметрии переходит в плоскость SBC. А так как окружность, на которой лежат вершины основания пирамиды, при рассматриваемой симметрии переходит в себя, то точка E переходит в точку C.

Аналогично доказывается, что $BC = ED = AB = DC$.

12.15. Ответ: 60°. Пусть L — точка касания плоскости KDM и вписанного в куб шара. Проведём через диагональ $B'D$ куба шесть плоскостей α, $\varkappa$, λ, μ, γ и β, которые проходят через точки A', K, L, M, C' и B соответственно.

Двугранный угол тетраэдра $A'B'C'D$ при ребре $B'D$ равен 120°, поскольку при повороте на 120° вокруг оси $B'D$ точки A', B и C' переходят друг в друга.

Точки, в которых касаются вписанного шара плоскости KDM и KDA', имеющие общую прямую KD, симметричны относительно плоскости KDB', проходящей через центр шара. Эти точки — точка L и середина отрезка $A'D$. Таким образом, прямые DL и DA' симметричны относительно плоскости $\varkappa = KDB'$, поэтому плоскости λ и α тоже симметричны относительно этой плоскости. Аналогично доказывается, что плоскости λ и γ симметричны относительно плоскости μ. Следовательно, двугранный угол при ребре $B'D$ тетраэдра $B'DKM$ в два раза меньше двугранного угла тетраэдра $A'B'C'D$ при ребре $B'D$, т. е. он равен 60°.

12.16. Ответ: 9. Пусть Π — плоскость симметрии фигуры, состоящей из трёх попарно непараллельных прямых. Возможны лишь два варианта: 1) относительно Π симметрична каждая данная прямая; 2) одна прямая симметрична относительно Π, а две другие прямые симметричны друг другу. В первом случае либо одна прямая перпендикулярна Π, а две другие принадлежат Π, либо все три прямые принадлежат Π. Таким образом, плоскость Π задаётся некоторой парой данных прямых. Следовательно, плоскостей симметрии этого типа не более трёх.

Во втором случае плоскость Π проходит через биссектрису угла между двумя данными прямыми перпендикулярно плоскости, содержащей эти прямые. Для каждой пары прямых существуют ровно две такие плоскости, поэтому число плоскостей симметрии этого типа не более шести.

Итак, всего плоскостей симметрии не более девяти. Кроме того, фигура, состоящая из трёх попарно перпендикулярных прямых, проходящих через одну точку, имеет как раз девять плоскостей симметрии.

Замечание. Ср. с задачей 12.9.

12.17. Ответ: 0, 1, 2, 3 или 6. Плоскость симметрии треугольной пирамиды $ABCD$ обязательно содержит две её вершины. Действительно, если бы были две пары вершин, симметричных относительно одной плоскости, то все четыре вершины пирамиды лежали бы в одной плоскости. Поэтому плоскость симметрии однозначно задаётся парой вершин A и B, лежащих в ней. При этом $AC = BC$ и $AD = BD$.

Предположим, что есть две плоскости симметрии. Рёбра, через которые они проходят (на рисунках они выделены), могут либо иметь общую вершину (рис. 12.3, *а*), либо не иметь (рис. 12.3, *б*).

В первом случае мы получаем правильную пирамиду, которая имеет либо три плоскости симметрии, либо шесть (когда длина бокового ребра равна длине ребра основания, т. е. в случае правильного тетраэдра). Во втором слу-

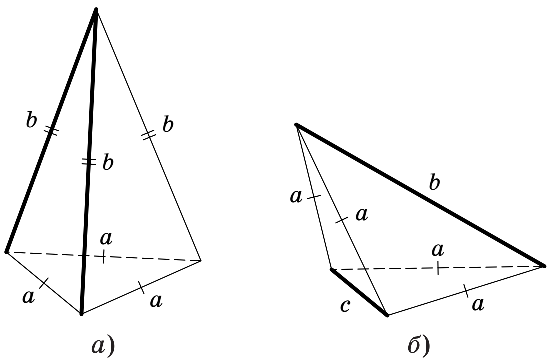


Рис. 12.3

чае пирамида имеет либо две плоскости симметрии, либо шесть (если $c = b \neq a$, то новых плоскостей симметрии не возникает).

12.18. Пусть M — центр масс тетраэдра. При гомотетии с центром M и коэффициентом $-\frac{1}{3}$ вершины тетраэдра переходят в центры масс его граней, а значит, описанная сфера тетраэдра переходит в сферу радиуса $\frac{R}{3}$, пересекающую все грани тетраэдра (или касающуюся их). Для доказательства того, что радиус этой сферы не меньше r, достаточно провести плоскости, параллельные граням тетраэдра и касающиеся частей этой сферы, лежащих вне тетраэдра. В самом деле, тогда эта сфера окажется вписанной в тетраэдр, подобный исходному и не меньший его.

12.19. Соответственные рёбра тетраэдров параллельны, потому что их продолжения являются пересечениями пар параллельных плоскостей. Таким образом, соответственные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны, причём можно считать, что эти треугольники лежат в разных плоскостях, потому что у двух не совпадающих тетраэдров должна быть пара не совпадающих плоскостей граней. Поэтому через каждую пару соответственных сторон треугольников можно провести плоскость, причём полученные три плоскости попарно различны. Эти три плоскости либо пересекаются в одной точке O, либо прямые их пересечения параллельны. В первом случае гомотетия с центром O переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$, поэтому она переводит плоскости граней тетраэдра $ABCD$ в плоскости граней тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$. Во втором случае тетраэдры совмещаются параллельным переносом.

12.20. Ответ: всегда. Пусть расстояния между последовательными данными плоскостями равны a, b и c. Возьмём произвольный правильный тетраэдр $ABCD$. Построим на его ребре AB точки P и Q так, что $AP : PQ : QB = a : b : c$, а на ребре AD точку R так, что $AR : RD = a : b$. Через вершину C проведём плоскость CPR, а через остальные вершины тетраэдра проведём плоскости, параллельные ей. Сделав гомотетию, мы можем добиться, чтобы расстояния между построенными плоскостями были равны a, b и c.

12.21. Пусть SAB — исходная грань пирамиды $SABCD$, SAD — вторая грань. Повернём плоскости этих граней относительно прямых AB и AD так, чтобы они совпали с плоскостью основания (поворот производится в сторону меньшего угла). Рассмотрим систему координат с началом в точке A и осями Ox и Oy, направленными по лучам AB и AD. Первая проекция задаёт преобразование, при котором точка (x, y) переходит в (x, ky), где $k = \cos\alpha$ (α — угол между основанием и боковой гранью); при второй проекции точка (x, y) переходит в (kx, y). Следовательно, композиция этих преобразований переводит точку (x, y) в (kx, ky).

12.22. Пусть A и B — наиболее удалённые друг от друга точки многогранника. Тогда образы многогранника M при гомотетиях с центрами A и B и коэффициентом $\frac{1}{2}$ задают искомое расположение. В самом деле, эти многогранники не пересекаются, так как они расположены но разные стороны от плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему. Кроме того, они лежат внутри M, так как M — выпуклый многогранник.

12.23. Рассмотрим выпуклый многогранник M и любые три многогранника M_1, M_2 и M_3, гомотетичны ему с коэффициентом k. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры соответствующих гомотетий. Ясно, что если A — точка многогранника M, наиболее удалённая от плоскости, содержащей точки O_1, O_2 и O_3, то A не принадлежит ни одному из многогранников M_1, M_2 и M_3. Это следует из того, что при гомотетии с коэффициентом k и центром O, лежащим в плоскости Π, наибольшее расстояние от многогранника до плоскости Π изменяется в k раз.

12.24. Пусть N — центр масс треугольника ABC. При гомотетии с центром N и коэффициентом $\frac{1}{4}$ точка D переходит в M. Докажем, что точка M лежит в плоскости Π, проходящей через центр O_1 описанной окружности треугольника ABC перпендикулярно его медиане AK. В самом деле, $OM \perp AK$, поскольку прямая AK лежит в плоскости ADM, перпендикулярной прямой OM по условию, и $OO_1 \perp AK$, поэтому $OM \perp AK$. Итак, точка D лежит в плоскости Π', полученной из плоскости Π гомотетией с центром N и коэффициентом 4. Наоборот, если точка D лежит в этой плоскости, то $OM \perp AK$.

Точка M — середина отрезка KL, где L — середина ребра AD. Медиана OM треугольника KOL является высотой тогда и только тогда, когда $KO = OL$. А так как $OA = OB$, то высоты OK и OL равнобедренных треугольников BOC и AOD равны тогда и только тогда, когда $BC = AD$, т. е. точка D лежит на сфере радиуса BC с центром A. Искомым ГМТ является пересечение этой сферы с плоскостью Π'.

12.25. При указанном преобразовании остаются неподвижными только точки (a, a, a), лежащие на одной прямой. Докажем, что в плоскости $x + y + z = 0$, перпендикулярной этой прямой, рассматриваемое преобразование является поворотом на 120° вокруг начала координат. Пусть φ — угол между векторами

(x, y, z) и (y, z, x), лежащими в плоскости $x+y+z=0$. Из равенства $z=-x-y$ следует, что

$$\cos\varphi = \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{xy-(x+y)^2}{x^2+y^2+(x+y)^2} = \frac{-x^2-y^2-xy}{2x^2+2y^2+2xy} = -\frac{1}{2}.$$

В плоскости $x+y+z=c$ для любого c отображение векторов то же самое.

12.26. Можно считать, что плоскости Π' и Π'' не параллельны, так как иначе утверждение очевидно. Пусть l — прямая пересечения этих плоскостей, A_i^* — точка пересечения прямой l с плоскостью $A_iA_i'A_i''$. Плоскость $A_iA_i'A_i''$ перпендикулярна прямой l, поэтому $l \perp A_i'A_i^*$ и $l \perp A_i''A_i^*$. Следовательно, если повернуть плоскость Π'' вокруг прямой l так, чтобы она совпала с плоскостью Π', то прямые $A_i'A_i''$ будут перпендикулярны прямой l.

12.27. Оси вращения ограниченного тела пересекаются в его центре масс. Покажем, что если тело имеет две оси вращения, пересекающиеся в точке O, и точка A принадлежит телу, то телу принадлежит вся сфера радиуса OA с центром O. Предположим противное, т. е. что наша сфера содержит как точки, принадлежащие телу, так и не принадлежащие ему. Тогда на этой сфере есть также граничные точки тела, т. е. такие точки, что в любом шаре с центром в этой точке есть как точки, принадлежащие телу, так и не принадлежащие ему. Пусть M — (непустое) множество граничных точек на сфере и x — произвольная точка этого множества. Проведём через точку x две окружности, лежащие на сфере: одну с центром на первой оси вращения и лежащую в плоскости, перпендикулярной первой оси вращения, а другую с центром на второй оси вращения и лежащую в плоскости, перпендикулярной второй оси. Легко видеть, что если эти две окружности не касаются друг друга в точке x, то x не может быть граничной точкой. Поэтому точка x принадлежит плоскости, содержащей обе оси вращения. Тогда множество M целиком содержится в этой плоскости, но множество M переходит в себя при любом повороте вокруг любой из осей. Получено противоречие, поэтому множество M пусто, а значит, вся сфера принадлежит нашему телу. Таким образом, плоскостью симметрии является любая плоскость, проходящая через точку O.

12.28. Рассмотрим сечение плоскостью, перпендикулярной прямой l. Требуемое утверждение следует теперь из соответствующего планиметрического утверждения о композиции двух осевых симметрий (см. «Задачи по планиметрии», задача 17.22 (б)).

12.29. Пусть A — некоторая точка, B — её образ при симметрии относительно точки O, C — образ точки B при повороте на угол φ относительно прямой l, D — образ точки C при симметрии относительно плоскости Π. Тогда точка D является образом точки A при повороте на угол $180^\circ+\varphi$ относительно прямой l, поэтому точка C является образом точки A при композиции поворота на угол $180^\circ+\varphi$ относительно прямой l и симметрии относительно плоскости Π.

12.30. Пусть h — общий перпендикуляр к прямым a и b. Проведём через прямую a плоскость Π_a, параллельную прямой b, и плоскость Π_{ha}, проходящую также и через прямую h. Симметрию относительно прямой a можно представить в виде композиции симметрий $S_a \circ S_{ha}$ относительно плоскостей Π_a и Π_{ha}. Аналогично симметрию относительно прямой b можно представить в виде композиции симметрий $S_{hb} \circ S_b$. Таким образом, рассматриваемую композицию относительно двух скрещивающихся прямых можно представить в виде

$$S_a \circ S_{ha} \circ S_{hb} \circ S_b.$$

Здесь $S_{ha} \circ S_{hb}$ — это поворот вокруг общего перпендикуляра h на угол, равный удвоенному углу между прямыми a и b. Поворот вокруг прямой и симметрия относительно плоскости, перпендикулярной этой прямой, перестановочны, поэтому

$$S_a \circ (S_{ha} \circ S_{hb}) \circ S_b = (S_a \circ S_b) \circ (S_{ha} \circ S_{hb}).$$

Композиция $S_a \circ S_b$ — это композиция симметрий относительно двух параллельных плоскостей, т. е. параллельный перенос на вектор, перпендикулярный обеим плоскостям (длина этого вектора равна удвоенному расстоянию между плоскостями).

12.31. Пусть S_a, S_b и S_c — симметрии относительно прямых a, b и c. Нас интересует композиция $S_a \circ S_b \circ S_c$. Согласно задаче 12.30 преобразование $S_a \circ S_b$ не изменится, если мы сделаем жёсткую конструкцию из прямых a и b и их общего перпендикуляра h и будем вращать её вокруг прямой h и сдвигать параллельно в направлении прямой h. Такими преобразованиями можно заменить прямые a и b на прямые a' и b' так, что прямая b' будет общим перпендикуляром к прямым c и h. Согласно задаче 12.7 имеем $S_{b'} \circ S_c = S_{h'}$, где прямая h' параллельна прямой h, причём эти две прямые совпадают тогда и только тогда, когда прямые a, b и c имеют общий перпендикуляр. Прямые a' и h' перпендикулярны, поэтому согласно задаче 12.30 преобразование $S_{a'} \circ S_{b'} \circ S_c = S_{a'} \circ S_{h'}$ является композицией симметрии относительно общего перпендикуляра к прямым a' и h' и параллельного переноса на вектор, длина которого равна удвоенному расстоянию между прямыми a' и h', а это расстояние равно расстоянию между прямыми h и h'.

12.32. а) Пусть T — некоторое преобразование, переводящее точку A в точку B, отличную от A; S — симметрия относительно плоскости Π, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему. Тогда $S \circ T(A) = S(B) = A$, т. е. A — неподвижная точка преобразования $S \circ T$. Кроме того, если $T(X) = X$ для некоторой точки X, то $AX = T(A)T(X) = BX$. Следовательно, точка X принадлежит плоскости Π, а значит, $S(X) = X$. Таким образом, точка A и все неподвижные точки преобразования T являются неподвижными точками преобразования $S \circ T$.

Возьмём четыре точки пространства, не лежащие в одной плоскости, и рассмотрим их образы при данном преобразовании P. Можно подобрать зеркальные симметрии $S_1, \ldots, S_k$ ($k \leqslant 4$) так, что преобразование $S_1 \circ \ldots \circ S_k \circ P$ оставляет неподвижными выбранные четыре точки, т. е. это преобразование оставляет неподвижными все точки пространства. Следовательно, $P = S_k \circ \ldots \circ S_1$; для доказательства этого утверждения можно воспользоваться тем, что если

$S \circ F = G$, где S — симметрия относительно плоскости, то $S \circ G = S \circ S \circ F = F$, так как $S \circ S$ — тождественное преобразование.

б) Для преобразования, оставляющего точку O неподвижной, в качестве одной из четырёх точек, образы которых задают это преобразование, можно взять точку O. Во всём остальном доказательство аналогично решению задачи (а).

12.33. а) Согласно задаче 12.32 (б) любое движение первого рода, имеющее неподвижную точку, является композицией двух симметрий относительно плоскостей, т. е. поворотом относительно прямой, по которой пересекаются эти плоскости (см. задачу 12.28).

б) Пусть T — данное движение второго рода, а I — симметрия относительно неподвижной точки O этого преобразования. Так как I можно представить в виде композиции трёх симметрий относительно трёх попарно перпендикулярных плоскостей, проходящих через точку O, то I — преобразование второго рода. Поэтому $P = T \circ I$ — преобразование первого рода, причём O — неподвижная точка этого преобразования. Следовательно, P — поворот относительно некоторой оси l, проходящей через точку O. Поэтому преобразование $T = T \circ I \circ I = P \circ I$ является композицией поворота относительно некоторой прямой l и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной l (см. задачу 12.29).

12.34. После перекатывания любая точка A поверхности шара переходит в точку $T(A)$, где T — движение первого рода, имеющее неподвижную точку — центр шара. Согласно задаче 12.33 (а) преобразование T является поворотом относительно некоторой оси l. Следовательно, точки X_1, X_2 и X_3 лежат в плоскости, проходящей через точку X перпендикулярно прямой l.

12.35. Свяжем с данным трёхгранным углом прямоугольную систему координат $Oxyz$. Луч света, двигающийся в направлении вектора (x, y, z), после отражения от плоскости Oxy будет двигаться в направлении вектора $(x, y, -z)$. Таким образом, отразившись от всех трёх граней, он будет двигаться в направлении вектора $(-x, -y, -z)$.

12.36. Пусть B — точка падения луча на зеркало; A — точка луча, отличная от B; K и L — проекции точки A на зеркало в исходном и повёрнутом положении, A_1 и A_2 — точки, симметричные A относительно этих положений зеркала. Искомый угол равен углу A_1BA_2. Если $AB = a$, то $A_1B = A_2B = a$ и $AK = a \sin\alpha$. Так как $\angle KAL = \beta$, то $A_1A_2 = 2KL = 2AK \sin\beta = 2a \sin\alpha \sin\beta$. Следовательно, если φ — искомый угол, то $\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\alpha \sin\beta$.

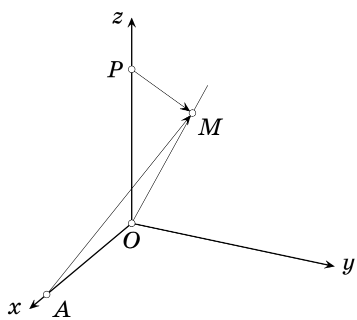


Рис. 12.4

12.37. Введём систему координат с началом O в вершине конуса, осью Oz, направленной по оси конуса, и осью Ox, проходящей через точку A (рис. 12.4). Пусть $\overrightarrow{OM}=(x, y, z)$, тогда $\overrightarrow{AM}=(x-a, y, z)$, где $a=AO$. Если α — угол между осью конуса Oz и его образующей, то $x^2+y^2=k^2z^2$, где $k=\operatorname{tg}\alpha$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{PM}$, перпендикулярный поверхности конуса, с началом P на оси конуса. Этот вектор имеет координаты (x, y, t), причём

$$0=(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{PM})=x^2+y^2+tz=k^2z^2+tz,$$

т. е. $t=-k^2z$.

При симметрии относительно прямой PM вектор $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AM}$ переходит в вектор $2\boldsymbol{b}\dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}}-\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{PM}$ (см. задачу 12.6). Третья координата этого вектора равна

$$-2k^2z\frac{x^2-ax+y^2-k^2z^2}{x^2+y^2+k^4z^2}-z=\frac{2ak^2xz}{(x^2+y^2)(1+k^2)}-z;$$

она должна быть равна нулю. Поэтому искомое ГМТ задаётся уравнением $x^2+y^2-\dfrac{2ak^2x}{1+k^2}=0$; оно представляет собой окружность радиуса $\dfrac{ak^2}{1+k^2}=a\sin^2\alpha$, проходящую через вершину конуса.

ГЛАВА 13
ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

§ 1. Определения выпуклости

Точку A фигуры Φ называют *внутренней*, если некоторый шар с центром в этой точке целиком лежит внутри фигуры Φ.

Точку A называют *граничной* точкой фигуры Φ, если любой шар с центром в этой точке содержит как точки, которые принадлежат фигуре Φ, так и точки, которые не принадлежат фигуре Φ. Отметим, что граничная точка не обязательно принадлежит фигуре. Если фигура содержит все свои граничные точки, то такую фигуру называют *замкнутой*.

Выпуклым многогранником называют фигуру, которая представляет собой пересечение конечного набора полупространств, причём у этой фигуры есть внутренние точки и она ограниченная (т. е. её можно разместить внутри некоторого шара).

Под выпуклым многогранником мы всегда подразумеваем замкнутую фигуру, т. е. рассматриваем его как пересечение замкнутых полупространств. Граница (т. е. множество всех граничных точек) выпуклого многогранника состоит из нескольких многоугольников, называемых его *гранями*; стороны этих многоугольников называют *рёбрами* многогранника.

13.1. Докажите, что любая точка, не принадлежащая данному выпуклому многограннику, отделена от него некоторой плоскостью грани.

Многогранником называют тело[1], ограниченное конечным числом многоугольников (иногда под многогранником подразумевают поверхность этого тела). Многогранник называют *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками он целиком содержит соединяющий их отрезок.

13.2. Докажите, что это определение выпуклого многогранника эквивалентно предыдущему.

13.3. Плоскости граней двух выпуклых многогранников совпадают. Обязательно ли совпадают сами многогранники?

Выпуклой оболочкой конечного набора точек называют пересечение всех выпуклых многогранников, содержащих эти точки.

[1]Телом называют фигуру в пространстве, у которой есть внутренние точки. Например, плоская фигура не является телом.

13.4. Докажите, что выпуклая оболочка четырёх точек A, B, C и D, не лежащих в одной плоскости, — это тетраэдр $ABCD$.

13.5. Докажите, что выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой набора всех своих вершин.

13.6. Докажите, что выпуклая оболочка точек $A_1, \ldots, A_n$, не лежащих в одной плоскости, является выпуклым многогранником, вершинами которого служат некоторые из данных точек.

§ 2. Разные задачи

13.7. а) Площади всех граней выпуклого многогранника равны. Докажите, что сумма расстояний от его внутренней точки до плоскостей граней не зависит от положения точки.

б) Высоты тетраэдра равны h_1, h_2, h_3 и h_4; d_1, d_2, d_3 и d_4 — расстояния от произвольной его внутренней точки до соответствующих граней. Докажите, что $\sum \frac{d_i}{h_i} = 1$.

13.8. а) Докажите, что выпуклый многогранник не может иметь ровно семь рёбер.

б) Докажите, что выпуклый многогранник может иметь любое число рёбер, большее 5 и отличное от 7,

13.9. Плоскость, пересекающая описанный многогранник, делит его на две части объёмом V_1 и V_2; его поверхность она делит на две части площадью S_1 и S_2, Докажите, что $V_1 : S_1 = V_2 : S_2$ тогда и только тогда, когда плоскость проходит через центр вписанной сферы.

13.10. В выпуклом многограннике из каждой вершины выходит чётное число рёбер. Докажите, что любое сечение его плоскостью, не содержащей вершин, является многоугольником с чётным числом сторон.

13.11. Докажите, что если любая вершина выпуклого многогранника соединена рёбрами со всеми остальными вершинами, то этот многогранник — тетраэдр.

13.12. Какое наибольшее число сторон может иметь проекция выпуклого многогранника с n гранями?

13.13. Каждая грань выпуклого многогранника имеет центр симметрии.

а) Докажите, что его можно разрезать на параллелепипеды.

б) Докажите, что он сам имеет центр симметрии.

13.14. Докажите, что если все грани выпуклого многогранника — параллелограммы, то их число является произведением двух последовательных натуральных чисел.

См. также задачи 2.7, 3.9, 3.14, 4.29, 4.36, 11.14, 11.21, 11.26, 11.30, 12.22, 12.23, 11.54, 11.55, 11.58, 15.6, 15.9, 15.36, 15.37, 15.43, 17.10, 19.18, 19.43–19.46.

§ 3. Признаки невписанности и неописанности

13.15. Некоторые грани выпуклого многогранника окрашены в чёрный цвет, остальные — в белый, причём никакие две чёрные грани не имеют общего ребра. Докажите, что если площадь чёрных граней больше площади белых, то в этот многогранник нельзя вписать сферу.

Может ли для описанного многогранника площадь чёрных граней равняться площади белых?

13.16. Некоторые грани выпуклого многогранника окрашены в чёрный цвет, а остальные — в белый, причём никакие две чёрные грани не имеют общего ребра. Докажите, что если чёрных граней больше половины, то этот многогранник нельзя вписать в сферу.

13.17. Некоторые вершины выпуклого многогранника окрашены в чёрный цвет, а остальные — в белый, причём хотя бы один конец каждого ребра белый. Докажите, что если чёрных вершин больше половины, то этот многогранник нельзя вписать в сферу.

13.18. Все вершины куба отсечены плоскостями, причём каждая плоскость отсекает тетраэдр. Докажите, что в полученный многогранник нельзя вписать сферу.

13.19. Через все рёбра октаэдра проведены плоскости, не пересекающие его; при этом образовался многогранник с четырёхугольными гранями: каждому ребру октаэдра соответствует одна грань. Докажите, что полученный многогранник нельзя вписать в сферу.

§ 4. Формула Эйлера

Во всём этом параграфе В — число вершин, Р — число рёбер, Г — число граней выпуклого многогранника.

13.20. Докажите, что $В - Р + Г = 2$ (формула Эйлера).

13.21. а) Докажите, что сумма углов всех граней выпуклого многогранника равна удвоенной сумме углов плоского многоугольника с тем же числом вершин.

б) Рассмотрим для каждой вершины выпуклого многогранника разность между 2π и суммой плоских углов, сходящихся в этой вершине. Докажите, что сумма всех этих величин равна 4π.

13.22. Пусть $Г_k$ — число k-угольных граней произвольного многогранника, $В_k$ — число его вершин, в которых сходится k рёбер. Докажите, что $2Р = 3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots = 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots$

13.23. а) Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдётся либо треугольная грань, либо трёхгранный угол.

б) Докажите, что для любого выпуклого многогранника сумма числа треугольных граней и числа трёхгранных углов не меньше 8.

13.24. Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдётся грань, у которой менее шести сторон.

13.25. Докажите, что для любого выпуклого многогранника

а) $3Г \geqslant 6 + Р$ и $3В \geqslant 6 + Р$;

б) $2Г \geqslant 4 + В$ и $2В \geqslant 4 + Г$.

13.26. Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют пять, шесть или семь сторон, а все многогранные углы — трёхгранные. Докажите, что число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.

13.27. а) Поверхность выпуклого многогранника можно разрезать на несколько прямоугольников. Докажите, что число вершин этого многогранника не больше 8.

б) Поверхность выпуклого многогранника можно разрезать на несколько правильных треугольников. Докажите, что число вершин этого многогранника не больше 12.

13.28. На рёбрах выпуклого многогранника расставлены знаки плюс и минус. Докажите, что найдётся вершина, при обходе вокруг которой число перемен знака будет меньше 4 (лемма Коши).

См. также задачу 7.33.

§ 5. Обходы многогранников

13.29. Планета имеет форму выпуклого многогранника, причём в его вершинах расположены города, а каждое ребро является дорогой. Две дороги закрыты на ремонт. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой по оставшимся дорогам.

13.30. Планета имеет форму выпуклого многогранника, причём в его вершинах расположены города, а каждое ребро является дорогой.

В двух городах A и B объявлен карантин. Докажите, что из любого из оставшихся городов можно проехать в любой другой, не проезжая через города A и B.

13.31. На каждом ребре выпуклого многогранника поставлена стрелка так, что в каждую вершину многогранника входит и из каждой вершины выходит по крайней мере одна стрелка. Докажите, что существуют по крайней мере две грани многогранника, каждую из которых можно обойти по периметру, двигаясь в соответствии с направлениями стрелок на её сторонах.

13.32. Система дорог, проходящих по рёбрам выпуклого многогранника, изображённого на рис. 13.1, соединяет все его вершины и не разбивает его на две части. Докажите, что эта система дорог имеет не менее четырёх тупиков. (Для системы дорог, изображённой на рис. 13.1, вершины A, B, C и D тупиковые.)

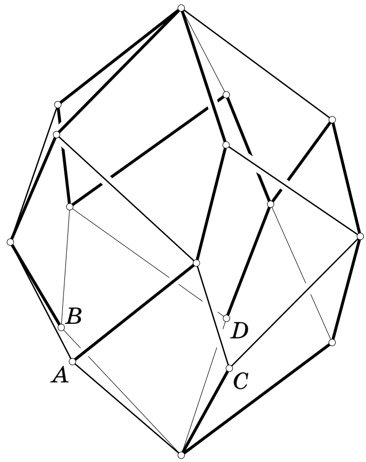


Рис. 13.1

§ 6. Проекции многогранников

13.33. Докажите, что выпуклый многогранник не может иметь такой вид сверху, как на рис. 13.2 (никаких невидимых рёбер при этом у многогранника нет).

13.34. Докажите, что выпуклый многогранник не может иметь такой вид сверху, как на рис. 13.3 (никаких невидимых рёбер при этом у многогранника нет).

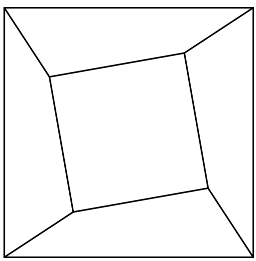


Рис. 13.2

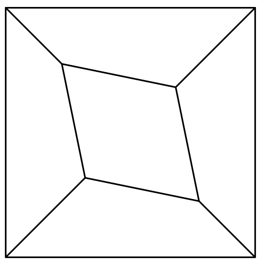


Рис. 13.3

13.35. Докажите, что выпуклый многогранник не может иметь такой вид сверху, как на рис. 13.4 (никаких невидимых рёбер при этом у многогранника нет).

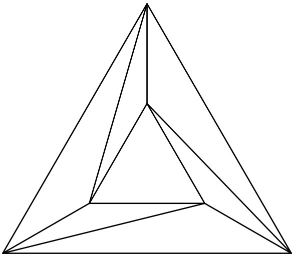


Рис. 13.4

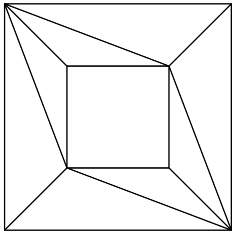


Рис. 13.5

13.36. Докажите, что выпуклый многогранник не может иметь такой вид сверху, как на рис. 13.5 (никаких невидимых рёбер при этом у многогранника нет).

* * *

13.37. Докажите, что выпуклый многогранник может иметь такой вид сверху, как на рис. 13.6 (никаких невидимых рёбер при этом у многогранника нет).

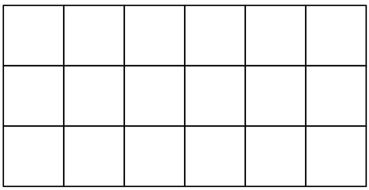


Рис. 13.6

§ 7. Полярные многогранники

Выберем внутри выпуклого многогранника P некоторую точку O и рассмотрим сферу S с центром O и произвольным радиусом R. Для каждой вершины V_i многогранника P рассмотрим полярную плоскость $V_i^{\perp}$ точки V_i относительно сферы S. Мы будем считать, что точка O — начало координат. Тогда полярная плоскость $V_i^{\perp}$ задаётся уравнением $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_i) = R^2$, где $\boldsymbol{v}_i = \overrightarrow{OV_i}$; полупространство, ограниченное плоскостью $V_i^{\perp}$ и содержащее точку O, задаётся неравенством $(y, v_i) \leqslant R^2$. Пересечение всех полупространств, ограниченных полуплоскостями $V_i^\perp$ и содержащих точку O, является выпуклым многогранником (задача 13.40). Этот многогранник называют *полярным* к данному многограннику P. Мы будем обозначать полярный многогранник $P^\perp$. Обратите внимание, что полярный многогранник зависит от выбора сферы S, но все полярные многогранники одного и того же выпуклого многогранника относительно сфер с одним и тем же центром подобны.

13.38. Докажите, что точка y принадлежит $P^\perp$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \leqslant R^2$ для всех точек x многогранника P.

13.39. Докажите, что если многогранник P содержит шар радиуса a с центром O, то фигура $P^\perp$ содержится в шаре радиуса R^2/a.

13.40. Докажите, что пересечение всех полупространств, ограниченных полуплоскостями $V_i^\perp$ и содержащих точку O, является выпуклым многогранником.

13.41. Докажите, что $(P^\perp)^\perp = P$, если оба раза полярность рассматривается относительно одной и той же сферы.

13.42. а) Докажите, что многогранник, полярный вписанному многограннику относительно центра описанной сферы, является описанным.

б) Докажите, что многогранник, полярный описанному многограннику относительно центра вписанной сферы, является вписанным.

§ 8. Теорема Коши о жёсткости выпуклых многогранников

Два многогранника называют *эквивалентными*, если между их гранями, рёбрами и вершинами установлены взаимно однозначные соответствия, сохраняющие отношение *инцидентности*, т. е. если две грани соответствуют друг другу, то принадлежащие им рёбра тоже соответствуют друг другу, а если два ребра соответствуют друг другу, то их концы тоже соответствуют друг другу.

13.43. Предположим, что любые две соответственные грани эквивалентных выпуклых многогранников M и M' можно совместить движением, переводящим соответственные вершины в соответственные. Докажите, что тогда сами многогранники равны (теорема Коши).

Замечание. Для невыпуклых многогранников аналогичное утверждение неверно. В качестве примера можно взять куб и построить на одной из его граней двумя разными способами (внешним и внутренним) пирамиду, основанием которой служит эта грань.

Решения

13.1. Пусть точка A не принадлежит выпуклому многограннику P. Соединим её отрезком с какой-нибудь внутренней точкой B этого многогранника. Отрезок AB пересекает поверхность многогранника, поэтому он имеет общую точку с некоторой гранью Q. Отрезок AB не может лежать в плоскости грани Q. Действительно, если бы внутренняя точка B многогранника лежала в плоскости грани Q, то многогранник не мог бы лежать по одну сторону от этой плоскости. Следовательно, отрезок AB пересекает плоскость грани Q. Но выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости грани Q, а именно по ту же сторону, что и его внутренняя точка B. Таким образом, плоскость грани Q отделяет точку A от многогранника.

13.2. Рассмотрим сначала тело P, которое является пересечением конечного числа полупространств. Нужно доказать, что если точки A и B принадлежат этому телу, то ему принадлежит весь отрезок AB. Предположим, что на отрезке AB есть точка C, не принадлежащая телу P. Тогда согласно задаче 13.1 точка C отделена от многогранника P некоторой плоскостью. Эта плоскость пересекает отрезок AB, причём точки A и B лежат по одну сторону от неё. Приходим к противоречию.

Рассмотрим теперь многогранник P, который вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит соединяющий их отрезок. Достаточно доказать, что он лежит по одну сторону от каждой из плоскостей своих граней. Предположим, что точки A и B многогранника P лежат по разные стороны от плоскости грани Q. Соединив точки A и B отрезками со всеми точками грани Q, получим две пирамиды с общим основанием Q. По условию все построенные отрезки принадлежат многограннику P, поэтому грань Q лежит внутри многогранника. Приходим к противоречию.

13.3. О т в е т: нет, не обязательно. Возьмём тетраэдр и проведём плоскость, пересекающую все его грани. Эта плоскость разрезает тетраэдр на два многогранника, у которых совпадают все плоскости граней.

13.4. Достаточно доказать, что любой выпуклый многогранник P, содержащий точки A, B, C и D, содержит весь тетраэдр $ABCD$. Ясно, что многогранник P содержит треугольник ABC. Кроме того, он содержит все отрезки, соединяющие точку D с точками треугольника ABC, поэтому он содержит весь тетраэдр $ABCD$.

13.5. Достаточно доказать, что выпуклая оболочка вершин выпуклого многогранника P содержит многогранник P (обратное утверждение очевидно). Выберем произвольную вершину A многогранника P и рассмотрим все грани, не содержащие A. Соединяя точку A со всеми точками грани, получаем пирамиду; эта пирамида принадлежит выпуклой оболочке. Ясно также, что многогранник P является объединением всех этих пирамид.

13.6. Применим индукцию по n. Случай $n=4$ разобран в решении задачи 13.4. Если $n>4$, то по индукции мы можем предположить, что выпуклой оболочкой точек $A_1, \ldots, A_{n-1}$ является выпуклый многогранник P с вершинами в некоторых из этих точек. Соединим точку A_n отрезками со всеми точками многогранника P. В результате получим многогранник P_1, состоящий из пирамид с вершиной A_n, основаниями которых служат грани многогранника P. Многогранник P_1 содержится в выпуклой оболочке точек $A_1, \ldots, A_n$. Действительно, в ней содержатся многогранник P и точка A_n, а потому содержатся и все проведённые отрезки.

Докажем, что многогранник P_1 выпуклый. Пусть B и C — две его точки. Они лежат на отрезках A_nB' и A_nC', где B' и C' — точки многогранника P. Многогранник P выпуклый, поэтому ему принадлежит весь отрезок $B'C'$. Следовательно, весь треугольник $A_nB'C'$ принадлежит многограннику P_1. В частности, этому многограннику принадлежит весь отрезок BC.

Выпуклый многогранник P_1 содержит все данные точки, поэтому он содержит их выпуклую оболочку. То, что он сам содержится в выпуклой оболочке, мы уже доказали.

Замечание. Если данная точка A_n не принадлежит выпуклой оболочке остальных данных точек, то она является вершиной. Действительно, тогда точку A_n можно отделить от многогранника P плоскостью. Отрезки, соединяющие точку A_n с точками многогранника P, пересекают эту плоскость. Поэтому точка A_n не может лежать ни внутри ребра многогранника P_1, ни внутри его грани, ни внутри его самого.

13.7. а) Пусть V — объём многогранника, S — площадь его грани, h_i — расстояние от точки X, лежащей внутри многогранника, до i-й грани. Разрезая многогранник на пирамиды с вершиной X, основаниями которых служат его грани, получаем

$$V = \frac{Sh_1}{3} + \ldots + \frac{Sh_n}{3}.$$

Следовательно, $h_1 + \ldots + h_n = 3\frac{V}{S}$.

б) Пусть V — объём тетраэдра. Так как $h_i = 3\frac{V}{S_i}$, где S_i — площадь i-й грани, то $\sum \frac{d_i}{h_i} = \sum \frac{d_iS_i}{3V}$. Остаётся заметить, что $\frac{d_iS_i}{3} = V_i$, где V_i — объём пирамиды с вершиной в выбранной точке тетраэдра, основанием которой служит i-я грань, и $\sum V_i = V$.

13.8. а) Предположим, что многогранник имеет только треугольные грани, причём их количество равно Г. Тогда число рёбер многогранника равно $\frac{3Г}{2}$, т. е. оно делится на 3. Если же у многогранника есть грань с числом сторон более трёх, то число его рёбер не менее восьми.

б) Пусть $n \geqslant 3$. Тогда $2n$ рёбер имеет n-угольная пирамида, а $2n+3$ рёбер имеет многогранник, который получится, если от n-угольной пирамиды отсечь треугольную пирамиду плоскостью, проходящей вблизи от одной из вершин основания.

13.9. Предположим для определённости, что центр O вписанной сферы принадлежит части многогранника с объёмом V_1. Рассмотрим пирамиду с вершиной O, основанием которой служит сечение многогранника данной плоскостью. Пусть V — объём этой пирамиды. Тогда $V_1 - V = r\dfrac{S_1}{3}$ и $V_2 + V = r\dfrac{S_2}{3}$, где r — радиус вписанной сферы (см. задачу 3.7). Поэтому $S_1 : S_2 = V_1 : V_2$ тогда и только тогда, когда $(V_1 - V) : (V_2 + V) = S_1 : S_2 = V_1 : V_2$, а значит, $V = 0$, т. е. точка O принадлежит секущей плоскости.

13.10. Прямых, соединяющих вершины многогранника, конечное число, поэтому данную плоскость можно слегка пошевелить так, чтобы в процессе шевеления она не пересекла ни одной вершины и в новом положении она не была бы параллельна ни одной прямой, соединяющей вершины многогранника. Будем сдвигать эту плоскость параллельно, до тех пор пока она не выйдет за пределы многогранника. Число вершин сечения будет изменяться, только когда плоскость будет проходить через вершины многогранника, причём она каждый раз будет проходить лишь через одну вершину. Если по одну сторону от этой плоскости лежит m рёбер, выходящих из вершины, а по другую n рёбер, то число сторон сечения при переходе через вершину изменяется на $n - m = (n + m) - 2m = 2k - 2m$, т. е. на чётное число. Так как после выхода плоскости за пределы многогранника число сторон сечения равно нулю, то число сторон исходного сечения чётно.

13.11. Если любая вершина многогранника соединена рёбрами со всеми остальными вершинами, то все грани треугольные.

Рассмотрим две грани ABC и ABD с общим ребром AB, Предположим, что многогранник не тетраэдр. Тогда у него есть ещё вершина E, отличная от вершин рассматриваемых граней. Так как точки C и D лежат по разные стороны от плоскости ABE, треугольник ABE не является гранью данного многогранника. Если провести разрезы по рёбрам AB, BE и EA, то поверхность многогранника распадается на две части (для невыпуклого многогранника это было бы неверно), причём точки C и D лежат в разных частях. Поэтому точки C и D не могут быть соединены ребром, так как иначе разрез пересекал бы его, но рёбра выпуклого многогранника не могут пересекаться по внутренним точкам.

13.12. Ответ: $2n - 4$. Докажем сначала, что проекция выпуклого многогранника с n гранями может иметь $2n - 4$ сторон. Отрежем от правильного тетраэдра $ABCD$ ребро CD призматической поверхностью, боковые рёбра которой параллельны CD (рис. 13.7). Проекция полученного многогранника с n гранями на плоскость, параллельную прямым AB и CD, имеет $2n - 4$ сторон.

Докажем теперь, что проекция M выпуклого многогранника с n гранями не может иметь более $2n - 4$ сторон. Число сторон проекции на плоскость, перпендикулярную грани, не может быть больше числа сторон всех других проекций. В самом деле, при такой проекции данная грань переходит в сторону многоугольника; если же плоскость проекции слегка пошевелить, то эта сторона сохранится или распадётся на несколько сторон, а число остальных

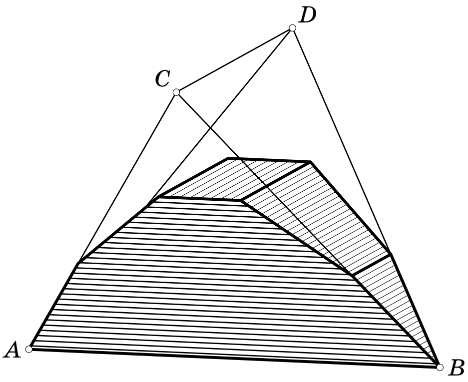


Рис. 13.7

сторон не изменится. Поэтому будем рассматривать проекции на плоскости, не перпендикулярные граням. В этом случае рёбра, проецирующиеся в границу многоугольника M, разбивают многогранник на две части: «верхнюю» и «нижнюю». Пусть p_1 и p_2, q_1 и q_2, r_1 и r_2 — число вершин, рёбер и граней в верхней и нижней частях (вершины и рёбра границы не учитываются); m — число вершин многоугольника M, m_1 (соответственно m_2) — число вершин многоугольника M, из которых выходит хотя бы одно ребро верхней (соответственно нижней) части. Так как из каждой вершины многоугольника M выходит по крайней мере одно ребро верхней или нижней части, то $m \leqslant m_1 + m_2$. Оценим теперь число m_1. Из каждой вершины верхней части выходит не менее трёх рёбер, поэтому число концов рёбер верхней части не менее $3p_1 + m_1$. С другой стороны, число концов этих рёбер равно $2q_1$; поэтому $3p_1 + m_1 \leqslant 2q_1$. Докажем теперь, что $p_1 - q_1 + r_1 = 1$. Проекции рёбер верхней части разбивают многоугольник M на несколько многоугольников. Сумма углов этих многоугольников равна $\pi(m-2) + 2\pi p_1$. С другой стороны, она равна $\sum\limits_i \pi(q_{1i} - 2)$, где q_{1i} — число сторон i-го многоугольника разбиения; последняя сумма равна $\pi(m + 2q_1) - 2r_1$. Приравнивая оба выражения для суммы углов многоугольников, получаем требуемое. Так как $q_1 = p_1 + r_1 - 1$ и $m_1 + 3p_1 \leqslant 2q_1$, то $m_1 \leqslant 2r_1 - 2 - p_1 \leqslant 2r_1 - 2$. Аналогично $m_2 \leqslant 2r_2 - 2$. Следовательно,

$$m \leqslant m_1 + m_2 \leqslant 2(r_1 + r_2) - 4 = 2n - 4.$$

13.13. а) Возьмём произвольную грань данного многогранника и её ребро r_1. Так как грань центрально симметрична, то она содержит ребро r_2, равное и параллельное r_1. Грань, прилегающая к ребру r_2, тоже имеет ребро r_3, равное и параллельное r_1 и т. д. В итоге получаем «поясок» граней, заданный ребром r_1 (он обязательно замкнётся на ребре r_1). Если из поверхности многогранника вырезать этот «поясок», то останутся две «шапочки» Ш$_1$ и Ш$_2$. Сдвинем «шапочку» Ш$_1$ внутрь многогранника на вектор, заданный ребром r_1, и разрежем многогранник по полученной при этом поверхности $T(Ш_1)$. Часть многогранника, заключённую между $Ш_1$ и $T(Ш_1)$, можно разрезать на призмы, а разрезая их основания на параллелограммы (см. «Задачи по планиметрии», задача 25.22), получим разбиение на параллелепипеды. Грань многогранника, заключённого между $T(Ш_1)$ и $Ш_2$, центрально симметрична, а число его рёбер меньше, чем у исходного многогранника, на число рёбер «пояска», параллельных r_1. Следовательно, за конечное число подобных операций многогранник можно разрезать на параллелепипеды.

б) Как и в задаче (а), рассмотрим «поясок» и «шапочку», заданные ребром r грани Г. Проекция многогранника на плоскость, перпендикулярную ребру r, является выпуклым многоугольником, сторонами которого служат проекции граней, входящих в «поясок». Проекции граней одной «шапочки» задают разбиение этого многоугольника на центрально симметричные многоугольники. Следовательно, этот многоугольник центрально симметричен (см. «Задачи по планиметрии», задача 25.23), а значит, для грани Г найдётся грань Г$'$, проекция которой параллельна проекции Г, т. е. эти грани параллельны. Ясно также, что выпуклый многогранник может иметь лишь одну грань, параллельную Г. Грани Г и Г$'$ входят в один «поясок», поэтому Г$'$ тоже имеет ребро, равное и параллельное ребру r. Проводя аналогичные рассуждения для всех «поясков», заданных рёбрами грани Г, получаем, что грани Г и Г$'$ имеют соответственно равные и параллельные рёбра. Так как эти грани выпуклы, они равны. Середина отрезка, соединяющего центры их симметрии, является их центром симметрии.

Итак, для любой грани найдется центрально симметричная ей грань. Остаётся доказать, что все центры симметрии пар граней совпадают. Это достаточно доказать для двух граней, имеющих общее ребро. Рассматривая «поясок», заданный этим ребром, получим, что параллельные им грани также имеют общее ребро, причём оба центра симметрии пар граней совпадают с центром симметрии пары общих рёбер граней.

13.14. Воспользуемся решением задачи 13.13. Каждый «поясок» разбивает поверхность многогранника на две «шапочки». Так как многогранник центрально симметричен, обе «шапочки» содержат равное число граней. Поэтому другой «поясок» не может целиком лежать в одной «шапочке», т. е. любые два «пояска» пересекаются, причём ровно по двум граням (параллельным рёбрам, задающим «пояски»).

Пусть k — число различных «поясков». Тогда каждый «поясок» пересекается с $k-1$ другими «поясками», т. е. он содержит $2(k-1)$ граней. Так как любая грань является параллелограммом, она входит ровно в два «пояска». Поэтому число граней равно $\dfrac{2(k-1)k}{2} = (k-1)k$.

13.15. Докажем, что если никакие две чёрные грани описанного многогранника не имеют общего ребра, то площадь чёрных граней не превосходит площади белых. При доказательстве будем использовать то, что если две грани многогранника касаются сферы в точках O_1 и O_2, а AB — их общее ребро, то $\Delta ABO_1 = \Delta ABO_2$. Разобьём грани на треугольники, соединив каждую точку касания многогранника и сферы со всеми вершинами соответствующей грани. Из предыдущего замечания и условия следует, что каждому чёрному треугольнику можно сопоставить белый треугольник с такой же площадью. Поэтому сумма площадей чёрных треугольников не меньше суммы площадей белых треугольников.

Описанный многогранник — правильный октаэдр — можно окрасить так, чтобы площадь чёрных граней равнялась площади белых и никакие две чёрные грани не имели общего ребра.

13.16. Докажем, что если в многогранник вписана сфера и никакие две чёрные грани не имеют общего ребра, то чёрных граней не больше, чем белых. При доказательстве будем использовать то, что если O_1 и O_2 — точки касания со сферой граней с общим ребром AB, то $\Delta ABO_1 = \Delta ABO_2$, а значит, $\angle AO_1B = \angle AO_2B$. Рассмотрим все углы, под которыми из точек касания сферы с гранями видны рёбра соответствующей грани. Из предыдущего замечания и условия следует, что каждому такому углу чёрной грани можно сопоставить равный ему угол белой грани. Поэтому сумма чёрных углов не больше суммы белых углов. С другой стороны, сумма таких углов для одной грани равна 2π. Следовательно, сумма чёрных углов равна $2\pi n$, где n — число чёрных граней, а сумма белых углов равна $2\pi m$, где m — число белых граней. Таким образом, $n \leqslant m$.

13.17. Докажем, что если многогранник вписан в сферу и никакие две чёрные вершины не соединены ребром, то чёрных вершин не больше, чем белых.

Пусть плоскости, касающиеся в точках P и Q сферы с центром O, пересекаются по прямой AB. Тогда любые две плоскости, проходящие через отрезок PQ, высекают на плоскости ABP такой же угол, как и на плоскости ABQ. В самом деле, эти углы симметричны относительно плоскости ABO. Рассмотрим теперь для каждой вершины нашего многогранника углы, которые высекаются на касательной плоскости двугранными углами между сходящимися в этой вершине гранями. Из предыдущего замечания и условия следует, что каждому углу при черной вершине можно сопоставить равный ему угол при белой вершине. Поэтому сумма чёрных углов не больше суммы белых. С другой стороны, сумма таких углов для одной вершины равна $\pi(n-2)$, где n — число граней многогранного угла с этой вершиной (для доказательства этого удобно рассмотреть сечение многогранного угла плоскостью, параллельной касательной плоскости). Видно также, что если вместо этих углов рассматривать углы, дополняющие их до 180° (т. е. внешние углы многоугольника сечения), то их сумма для любой вершины будет равна 2π. Как и раньше, сумма таких чёрных углов не больше суммы белых. С другой стороны, сумма чёрных углов равна $2\pi n$, где n — число чёрных вершин, а сумма белых углов равна $2\pi m$, где m — число белых вершин. Следовательно, $2\pi n \leqslant 2\pi m$, т. е. $n \leqslant m$.

13.18. Окрасим грани исходного куба в белый цвет, а остальные грани полученного многогранника — в чёрный. Белых граней шесть, чёрных граней восемь, причём никакие две чёрные грани не имеют общего ребра. Следовательно, в этот многогранник нельзя вписать сферу (см. задачу 13.16).

13.19. Окрасим шесть вершин исходного октаэдра в белый цвет, а восемь новых вершин — в чёрный. Тогда один конец каждого ребра полученного многогранника белый, а другой чёрный. Следовательно этот многогранник нельзя вписать в сферу (см. задачу 13.17).

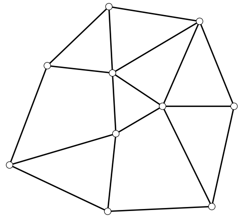


Рис. 13.8

13.20. П е р в о е р е ш е н и е. Пусть M — проекция многогранника на плоскость, не перпендикулярную ни одной его грани; при такой проекции все грани проецируются в многоугольники. Рёбра, проецирующиеся в стороны границы многоугольника M, разбивают многогранник на две части. Рассмотрим проекцию одной из этих частей (рис. 13.8). Пусть $n_1, \ldots, n_k$ — числа рёбер граней этой части, В_1 — число внутренних вершин этой части, $\text{В}'$ — число вершин границы многоугольника M. Сумма углов многоугольников, на которые разбит многоугольник M, равна, с одной стороны, $\sum \pi(n_i - 2)$, а с другой стороны, $\pi(\text{В}' - 2) + 2\pi \text{В}_1$. Следовательно, $\sum n_i - 2k = \text{В}' - 2 + 2\text{В}_1$, где k — число граней первой части. Записывая такое же равенство для второй части многогранника и складывая оба эти равенства, получаем требуемое.

В т о р о е р е ш е н и е. Рассмотрим сферу радиуса 1 с центром O, лежащим внутри многогранника. Углы вида AOB, где AB — ребро многогранника, разбивают поверхность сферы на сферические многоугольники. Пусть n_i — число сторон i-го сферического многоугольника, ς_i — сумма его углов, S_i — площадь. Согласно задаче 7.26 имеем $S_i = \varsigma_i - \pi(n_i - 2)$. Сложив все такие равенства для $i = 1, \ldots, \text{Г}$, получим $4\pi = 2\pi\text{В} - 2\pi\text{Р} + 2\pi\text{Г}$.

13.21. Пусть Σ — сумма всех углов граней выпуклого многогранника. В задаче (а) требуется доказать, что $\Sigma = 2(\text{В} - 2)\pi$, а в задаче (б) требуется доказать, что $2\text{В}\pi - \Sigma = 4\pi$. Поэтому обе задачи эквивалентны.

Если грань содержит k рёбер, то сумма её углов равна $(k - 2)\pi$. При суммировании по всем граням каждое ребро учитывается дважды, так как оно принадлежит ровно двум граням. Следовательно, $\Sigma = (2\text{Р} - 2\text{Г})\pi$. Поэтому $2\text{В}\pi - \Sigma = 2\pi(\text{В} - \text{Р} + \text{Г}) = 4\pi$.

13.22. Каждому ребру можно сопоставить две вершины, соединённые им. При этом вершина, в которой сходится k рёбер, встречается k раз. Поэтому $2\text{Р} = 3\text{В}_3 + 4\text{В}_4 + 5\text{В}_5 + \ldots$ С другой стороны, каждому ребру можно сопоставить две грани, прилегающие к нему. При этом k-угольная грань встречается k раз. Поэтому $2\text{Р} = 3\text{Г}_3 + 4\text{Г}_4 + 5\text{Г}_5 + \ldots$

13.23. а) Предположим, что некоторый выпуклый многогранник не имеет ни треугольных граней, ни трёхгранных углов. Тогда $\text{В}_3 = \text{Г}_3 = 0$, а значит, $2\text{Р} = 4\text{Г}_4 + 5\text{Г}_5 + \ldots \geqslant 4\text{Г}$ и $2\text{Р} = 4\text{В}_4 + 5\text{В}_5 + \ldots \geqslant 4\text{В}$ (см. задачу 13.22). Следовательно, $4\text{В} - 4\text{Р} + 4\text{Г} \leqslant 0$. С другой стороны, $4\text{В} - 4\text{Р} + 4\text{Г} = 2$. Получено противоречие.

б) Согласно формуле Эйлера $4В + 4Г = 4Р + 8$. Подставим в эту формулу следующие выражения для входящих в неё величин:

$$4В = 4В_3 + 4В_4 + 4В_5 + \ldots, \quad 4Г = 4Г_3 + 4Г_4 + 4Г_5 + \ldots$$

и

$$4Р = 2Р + 2Р = 3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots + 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots$$

После приведения подобных слагаемых получаем

$$В_3 + Г_3 = 8 + В_5 + 2В_6 + 3В_7 + \ldots + Г_5 + 2Г_6 + 3Г_7 \ldots \geqslant 8.$$

13.24. Предположим, что любая грань некоторого выпуклого многогранника имеет не менее шести сторон. Тогда $Г_3 = Г_4 = Г_5 = 0$, и поэтому $2Р = 6Г_6 + 7Г_7 + \ldots \geqslant 6Г$ (см. задачу 13.22), т. е. $Р \geqslant 3Г$. Кроме того, для любого многогранника $2Р = 3В_3 + 4В_4 + \ldots \geqslant 3В$. Складывая неравенства $Р \geqslant 3Г$ и $Р \geqslant 3В$, получаем $Р \geqslant Г + В$. С другой стороны, согласно формуле Эйлера $Р = Г + В - 2$. Получено противоречие.

Замечание. Аналогичным образом можно доказать, что в любом выпуклом многограннике найдётся вершина, из которой выходит менее шести рёбер.

13.25. а) Для любого многогранника $2Р = 3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots \geqslant 3В$. С другой стороны, $В = Р - Г + 2$. Поэтому $2Р \geqslant 3(Р - Г + 2)$, т. е. $3Г \geqslant 6 + Р$. Неравенство $3В \geqslant 6 + Р$ доказывается аналогично с помощью неравенства $2Р \geqslant 3Г$.

б) Складывая равенство $2В - 2Р + 2Г = 4$ с неравенством $2Р \geqslant 3Г$, получаем $2В \geqslant 4 + Г$. Неравенство $2Г \geqslant 4 + В$ доказывается аналогично с помощью неравенства $2Р \geqslant 3В$.

13.26. Пусть a, b и c — количества граней, имеющих 5, 6 и 7 сторон соответственно. Тогда $Р = \dfrac{5a + 6b + 7c}{2}$, $Г = a + b + c$ и, так как по условию из каждой вершины выходит три ребра, $В = \dfrac{5a + 6b + 7c}{3}$. Умножив все эти выражения на 6 и подставив в формулу $6(В + Г - Р) = 12$, получим требуемое.

13.27. а) Многогранный угол при каждой вершине получен в результате сгибания и склеивания углов, равных $\dfrac{\pi}{2}$ или π. Следовательно, этот угол может быть равен только $\dfrac{\pi}{2}$, π или $3\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому если вычесть его из 2π, то получится угол не меньше $\dfrac{\pi}{2}$.

Пусть число вершин многогранника равно n. Тогда если мы для каждой вершины рассмотрим разность между 2π и суммой плоских углов при этой вершине и сложим все такие числа, то получим не меньше $n\dfrac{\pi}{2}$. С другой стороны, согласно задаче 13.21 (б) полученная сумма для любого выпуклого многогранника равна 4π. Следовательно, $\dfrac{n\pi}{2} \leqslant 4\pi$, т. е. $n \leqslant 8$.

б) В этом случае разность между 2π и суммой плоских углов при любой вершине не меньше $\dfrac{\pi}{3}$. Поэтому если число вершин равно n, то $\dfrac{n\pi}{3} \leqslant 4\pi$, т. е. $n \leqslant 12$.

13.28. Предположим, что на рёбрах некоторого выпуклого многогранника можно расставить знаки плюс и минус так, что найдётся вершина, при обходе вокруг которой число перемен знака будет не меньше 4. Пусть В, Р и Г — число его вершин, рёбер и граней.

Для каждой вершины рассмотрим число перемен знака при обходе вокруг неё; пусть N — сумма всех этих чисел. По предположению $N \geqslant 4\text{В}$. Ясно, что если мы для каждой грани рассмотрим число перемен знака при обходе вокруг неё и сложим все полученные числа, то снова получим то же самое число N. Действительно, каждую перемену знака для двух рёбер, имеющих общую вершину и принадлежащих одной грани, мы в обоих случаях посчитаем ровно один раз. Но число перемен знака при обходе грани чётно и не превосходит числа сторон этой грани, поэтому

$$N \leqslant 2\text{Г}_3 + 4\text{Г}_4 + 4\text{Г}_5 + 6\text{Г}_6 + 6\text{Г}_7 + \ldots \qquad (1)$$

Воспользовавшись равенствами $\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2$ (задача 13.20) и $2\text{Р} = 3\text{Г}_3 + 4\text{Г}_4 + 5\text{Г}_5 + \ldots$ (задача 13.22), получаем

$$\begin{aligned} 4\text{В} - 8 = 4\text{Р} - 4\text{Г} &= \\ &= 6\text{Г}_3 + 8\text{Г}_4 + 10\text{Г}_5 + 12\text{Г}_6 + \ldots - 4\text{Г}_3 - 4\text{Г}_4 - 4\text{Г}_5 - 4\text{Г}_6 + \ldots = \\ &= 2\text{Г}_3 + 4\text{Г}_4 + 6\text{Г}_5 + 8\text{Г}_6 + 10\text{Г}_7 + \ldots \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (1), приходим к противоречию: $4\text{В} - 8 \geqslant N \geqslant 4\text{В}$.

13.29. Пусть A и B — данные города. Докажем сначала, что из A в B можно было проехать до закрытия на ремонт двух дорог. Рассмотрим для этого проекцию многогранника на некоторую прямую, не перпендикулярную ни одному из его рёбер (при такой проекции вершины многогранника не сливаются). Пусть A' и B' — проекции точек A и B, а M' и N' — крайние точки проекции многогранника (в точки M' и N' проецируются вершины M и N). Если идти из вершины A так, что в проекции движение будет происходить по направлению от M' к N', то в конце концов обязательно попадём в вершину N. Аналогично из вершины B можно пройти в N. Таким образом, можно проехать из A в B (через N).

Если полученный путь из A в B проходит через закрытую дорогу, то есть ещё два объезда по граням, для которых это ребро является общим. Вторая закрытая дорога не может находиться сразу на двух этих объездах.

13.30. Рассмотрим два случая.

1. Вершины A и B соединены ребром. Тогда через прямую AB можно провести плоскость Π_1 так, что весь многогранник лежит по одну сторону от этой плоскости. Затем можно провести плоскость Π_2, параллельную плоскости Π_1, так, чтобы плоскость Π_2 имела общую точку с многогранником и многогранник был бы заключён между плоскостями Π_1 и Π_2. Можно считать, что плоскость Π_1 расположена выше плоскости Π_2. Из любой вершины многогранника можно спуститься по рёбрам на плоскость Π_2, никогда не поднимаясь при этом вверх. Если заданы два города, отличных от A и B, то мы спускаемся из каждого из них на плоскость Π_2. Если мы попадём в разные вершины, то

их можно соединить рёбрами, лежащими в плоскости Π_2. Так мы получаем требуемый путь.

2. Вершины A и B не соединены ребром. Возьмём произвольную вершину C, отличную от этих двух вершин. По обе стороны от плоскости ABC есть вершины данного многогранника, поэтому его можно заключить между плоскостями Π_1 и Π_2, параллельными плоскости ABC, так, чтобы на каждой из этих плоскостей были вершины многогранника. Из каждой вершины многогранника можно попасть на плоскость Π_1 или Π_2, не проходя через плоскость ABC. Из вершины C можно попасть на обе эти плоскости. Поэтому из каждой вершины многогранника можно попасть в вершину C, не проходя при этом через вершины A и B. Следовательно, из любой вершины можно пройти в любую другую через вершину C.

13.31. Выйдем из произвольной вершины многогранника и будем идти по рёбрам в соответствии с указанными на них направлениями (если из вершины выходит несколько стрелок, то мы выбираем любую из них). Так мы будем идти до тех пор, пока не попадём в вершину, в которой уже побывали ранее. Путь от первого прохождения через эту вершину до второго образует «петлю», разбивающую многогранник на две части. Докажем, что в каждой из этих частей найдётся требуемая грань. Прежде всего заметим, что границу каждой из двух частей можно обойти в соответствии с направлениями стрелок. Если рассматриваемая фигура сама является гранью, то доказывать нечего. Поэтому будем предполагать, что на её границе есть вершина, из которой выходит (или входит) ребро, лежащее внутри рассматриваемой фигуры. Пройдём по этому ребру и будем идти дальше в соответствии с направлениями стрелок (или в противоположных направлениях, если ребро входящее, а не выходящее), до тех пор пока снова не попадём на границу фигуры. Этот путь разбивает фигуру на две части, границу одной из которых можно обойти в соответствии с направлениями стрелок. С этой частью проделаем то же самое. После нескольких таких операций получим требуемую грань.

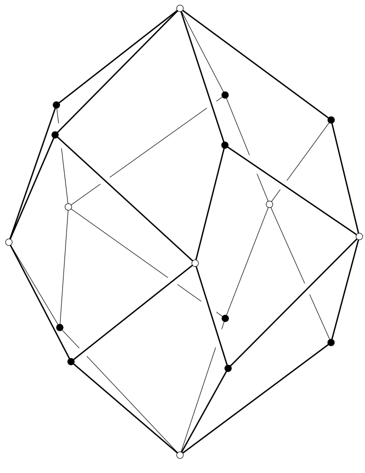


Рис. 13.9

13.32. Раскрасим вершины многогранника в два цвета так, как показано на рис. 13.9. Тогда любое ребро соединяет две вершины разного цвета. Для данной системы дорог назовём степенью вершины многогранника число дорог, проходящих через эту вершину. Если система дорог не имеет вершин степени более 2, то разность между числом чёрных и белых вершин не превосходит 1.

Если есть лишь одна вершина степени 3, а остальные вершины имеют степень не более 2, то разность между числом чёрных и белых вершин не превосходит 2. В нашем случае разность между числом чёрных и белых вершин равна $10 - 7 = 3$. Поэтому найдётся вершина степени не менее 4 или две вершины степени 3. В обоих случаях число тупиков не менее 4.

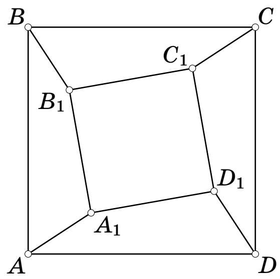


Рис. 13.10

13.33. Предположим, что требуемый выпуклый многогранник существует, и обозначим его вершины так, как показано на рис. 13.10. Плоскость, проведённая через вершину B_1 параллельно плоскости $ABCD$, пересекает ребро AA_1, поэтому вершина A_1 расположена дальше от этой плоскости, чем вершина B_1. Аналогично вершина B_1 расположена дальше, чем C_1, вершина C_1 дальше, чем D_1, а вершина D_1 дальше, чем A_1. Приходим к противоречию.

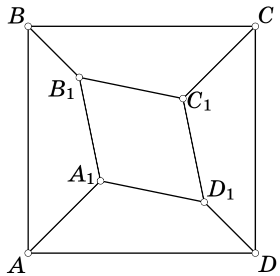


Рис. 13.11

13.34. Предположим, что требуемый выпуклый многогранник существует, и обозначим его вершины так, как показано на рис. 13.11. Плоскость, проведённая через вершину B_1 параллельно плоскости $ABCD$, пересекает рёбра AA_1 и CC_1, поэтому вершины A_1 и C_1 расположены дальше от этой плоскости, чем вершина B_1. Аналогично эти вершины расположены дальше, чем вершина D_1. Но отрезки A_1C_1 и B_1D_1 пересекаются, поэтому оба конца одного отрезка не могут быть расположены дальше от плоскости, чем оба конца другого. Приходим к противоречию.

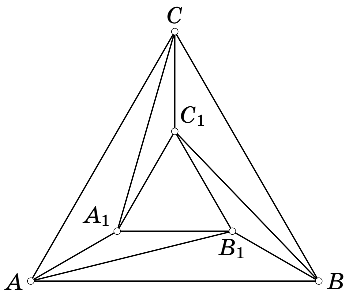


Рис. 13.12

13.35. Предположим, что требуемый выпуклый многогранник существует, и обозначим его вершины так, как показано на рис. 13.12. Рассмотрим точку пересечения проекций отрезков AB_1 и A_1B на плоскость ABC. Пусть A_2 и B_2 — точки отрезков A_1B и AB_1, проецирующиеся в эту точку. Наш рисунок показывает, что точка A_2 расположена ниже точки B_2, а значит, точка A_1 расположена ниже точки B_1. Аналогично точка B_1 расположена ниже точки C_1, а точка C_1 расположена ниже точки A_1. Приходим к противоречию.

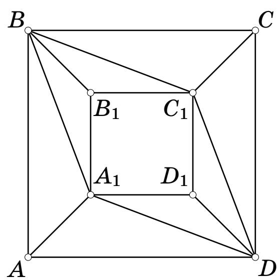


Рис. 13.13

13.36. Предположим, что требуемый выпуклый многогранник существует, и обозначим его вершины так, как показано на рис. 13.13. Такие же рассуждения, как и при решении задачи 13.35, показывают, что точка A_1 расположена выше точек B_1 и D_1. Аналогично точка C_1 расположена выше точек B_1 и D_1. Таким образом, оба конца отрезка A_1C_1 расположены выше концов отрезка B_1D_1. Но тогда эти отрезки не могут пересекаться. Получено противоречие.

13.37. Выберем систему координат $Oxyz$, поместив начало координат в центре прямоугольника, изображённого на рис. 13.6, и направив оси Ox и Oy параллельно его сторонам; будем также считать, что ось Oz направлена вверх. Пусть радиус описанной окружности рассматриваемого прямоугольника равен R. Сопоставим каждой точке (x_0, y_0), изображающей вершину требуемого многогранника, лежащую над ней точку $(x_0, y_0, R^2 - x_0^2 - y_0^2)$. При этом вершинам исходного прямоугольника сопоставляются точки, лежащие в координатной плоскости, а остальным вершинам сопоставляются точки, лежащие над координатной плоскостью, причём все эти точки лежат на выпуклой поверхности, заданной уравнением $z = R^2 - x^2 - y^2$. Покажем, что выпуклая оболочка всех сопоставленных точек является требуемым многогранником. Четыре точки, лежащие над вершинами любого маленького прямоугольника, компланарны; это легко доказать, вычислив координаты середин отрезков, соединяющих пары противоположных точек. Проверим теперь, что шесть точек, лежащих над шестью вершинами двух маленьких прямоугольников с общим ребром, не компланарны. Рассмотрим сечение поверхности $z = R^2 - x^2 - y^2$ плоскостью, проходящей через пару коллинеарных сторон рассматриваемых прямоугольников параллельно оси Oz. Это сечение представляет собой параболу, и три сопоставленных точки лежат на ней. Эти три точки не лежат на одной прямой, поэтому рассматриваемые шесть точек не лежат в одной плоскости.

13.38. Требуется доказать, что бесконечная система неравенств $(x, y) \leqslant R^2$ (по одному неравенству для каждой точки x многогранника P) эквивалентна конечной системе неравенств $(x, y) \leqslant R^2$, где в качестве x берутся не все точки многогранника, а только его вершины, т. е. $x = \boldsymbol{v}_i$. Ясно, что если неравенства выполняются для всех точек многогранника, то они, в частности, выполняются и для его вершин. Предположим теперь, что для каждой вершины многогранника P выполняется неравенство $(\boldsymbol{v}_i, y) \leqslant R^2$. Пусть x — произвольная точка многогранника P. Тогда $x = \sum \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ для некоторых неотрицательных чисел λ_i, сумма которых равна 1. Поэтому

$$(x, y) = \left(\sum \lambda_i \boldsymbol{v}_i, y\right) = \sum \lambda_i (\boldsymbol{v}_i, y) \leqslant \sum \lambda_i R^2 = R^2,$$

что и требовалось.

13.39. Воспользуемся определением фигуры $P^{\perp}$, сформулированным в задаче 13.38. Если неравенство $(x, y) \leqslant R^2$ выполняется для всех векторов x длины a, то вектор y имеет длину не больше $\dfrac{R^2}{a}$.

13.40. Нужно доказать лишь ограниченность фигуры $P^{\perp}$, а она доказана в задаче 13.39.

13.41. В задаче 13.38 приведено симметричное определение полярности. Если воспользоваться им, то требуемое утверждение становится очевидным.

13.42. а) Достаточно рассмотреть полярность относительно описанной сферы. Все плоскости граней исходного многогранника касаются этой сферы, поэтому их поляры (вершины полярного многогранника) лежат на ней.

б) Достаточно рассмотреть полярность относительно вписанной сферы. Все вершины исходного многогранника лежат на этой сфере, поэтому их полярные плоскости (плоскости граней полярного многогранника) касаются её. Кроме того, рассматриваемая сфера лежит внутри полярного многогранника.

13.43. Пусть O и O' — соответственные вершины многогранников M и M'. Рассмотрим две сферы малого радиуса ε с центрами O и O'. Пересечения этих сфер с многогранниками M и M' являются выпуклыми сферическими многоугольниками $A_1 \ldots A_n$ и $A_1' \ldots A_n'$, у которых по условию соответственные стороны равны. Для доказательства теоремы Коши нам потребуется задача 7.35 о свойствах сферических многоугольников.

Предположим, что у рассматриваемых многогранников M и M' не все соответственные двугранные углы равны. Пометим рёбра многогранника M знаками плюс и минус в зависимости от того, больше или меньше двугранные углы при этих рёбрах, чем соответственные двугранные углы многогранника M'. Если из какой-то вершины выходит помеченное ребро, то согласно задаче 7.35 из этой вершины выходит не менее четырёх помеченных рёбер, причём при обходе вокруг этой вершины происходит по крайней мере 4 перемены знака.

Если помечены все рёбра многогранника, то требуемое противоречие даёт задача 13.28. В случае, когда помечены не все рёбра, можно воспользоваться той же самой схемой рассуждений, что и в задаче 13.28. Пусть N_1' — число помеченных рёбер, N_0' — число вершин, из которых выходят помеченные рёбра, N_2' — число областей, на которые помеченные рёбра разбивают поверхность многогранника, a_k' — число этих областей, ограниченных k помеченными рёбрами. Сеть помеченных рёбер не обязательно связна: она может состоять из нескольких компонент, не соединённых друг с другом помеченными рёбрами. Но два важнейших свойства сохраняются: $a_2' = 0$, и через любую вершину сети проходит по крайней мере два помеченных ребра, т. е. нет «свободных» помеченных рёбер, из концов которых не выходят другие помеченные рёбра (первое свойство очевидно, а второе следует из задачи 7.35). Поэтому та же самая схема рассуждений приведёт к противоречию, если только удастся доказать, что $4N_1' - 4N_2' \leqslant 4N_0' - 8$, т. е. $N_0' - N_1' + N_2' \geqslant 2$.

Будем поочерёдно добавлять к помеченным рёбрам остальные рёбра, добавляя на каждом шаге одно ребро, у которого по крайней мере одна вершина принадлежит либо помеченному ребру, либо уже добавленному ребру. При каждом таком добавлении число рёбер увеличивается на 1, а число вершин плюс число областей либо увеличивается на 1, либо не изменяется. Действительно, если добавляется новая вершина, то число областей не изменяется, а если добавленное ребро соединяет две старые вершины, то либо это ребро разбивает одну область на две области, либо оно соединяет вершины двух разных компонент и не разбивает на части ни одну из областей. Таким образом, величина $\widetilde{N}_0 - \widetilde{N}_1 + \widetilde{N}_2$ на каждом шаге либо не изменяется, либо уменьшается на 1, а в самом конце, когда добавлены все рёбра, эта величина равна 2. Следовательно, $N'_0 - N'_1 + N'_2 \geqslant 2$, что и требовалось.

ГЛАВА 14

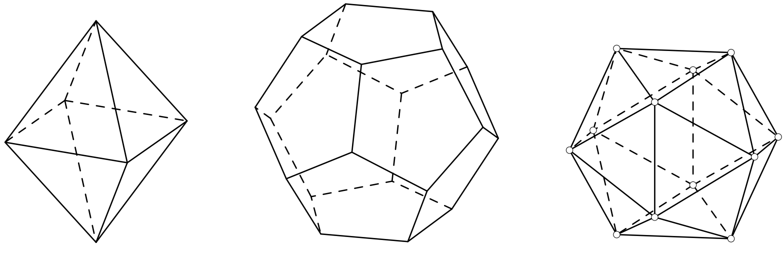
ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Основные сведения

Выпуклый многогранный угол называют *правильным*, если все его плоские углы равны и все двугранные углы тоже равны. Выпуклый многогранник называют *правильным*, если все его грани и многогранные углы правильные, а кроме того, все грани равны и многогранные углы тоже равны. С точки зрения логики, это определение неудачно — в нём сказано много лишнего. Достаточно было бы потребовать, чтобы грани и многогранные углы были правильными; их равенство уже следовало бы из этого. Но такие детали — не для первого знакомства с правильными многогранниками. (Разбору различных эквивалентных определений правильных многогранников посвящён § 6.)

Имеется всего лишь пять различных правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр; последние три многогранника изображены на рис. 14.1. Этот рисунок, впрочем, мало о чём говорит — он не может заменить ни доказательства того, что других правильных многогранников нет, ни даже доказательства того, что такие правильные многогранники, какие нарисованы, действительно существуют. Всё это нужно доказывать.

В одной из дошедших до нашего времени античных книг говорится, что октаэдр и икосаэдр открыл ученик Платона Теэтет (410–



Октаэдр Додекаэдр Икосаэдр

Рис. 14.1

368 г. до н. э.), а куб, тетраэдр и додекаэдр были известны пифагорейцам задолго до него. Многие историки математики сомневались в правдивости этих слов; особенное недоверие вызывало то, что октаэдр был открыт позже додекаэдра. Действительно, египетские пирамиды построены в глубокой древности, а соединив мысленно две пирамиды, легко получить октаэдр.

Но более внимательное исследование заставляет поверить словам античной книги. Эти слова вряд ли можно истолковать иначе, чем так: Теэтет выделил класс правильных многогранников, т. е. с какой-то степенью строгости дал их определение, обнаружив тем самым их общее свойство, и доказал, что существует всего лишь 5 различных правильных многогранников. Куб, тетраэдр и додекаэдр привлекали внимание геометров и до Теэтета, но лишь просто как интересные геометрические объекты, а не как правильные многогранники. Интерес к кубу, тетраэдру и додекаэдру подтверждает древнегреческая терминология: у этих многогранников были специальные названия.

Не удивительно, что куб и тетраэдр всегда интересовали геометров; додекаэдр требует пояснений. В природе встречаются кристаллы пирита, близкие по форме к додекаэдру. Сохранился также додекаэдр, непонятно для каких целей изготовленный этрусскими ремесленниками в 500 г. до н.э. Форма додекаэдра несравненно привлекательней и таинственней формы октаэдра. Пифагорейцев додекаэдр должен был заинтриговать ещё и потому, что их символом была правильная пятиконечная звезда, естественно вписывающаяся в грани додекаэдра.

При изучении правильных многогранников наибольшие трудности также вызывают именно октаэдр и икосаэдр. Скрепив три правильных треугольника, три квадрата или три правильных пятиугольника и продолжив такое конструирование, в конце концов придём к правильному тетраэдру, кубу или додекаэдру; при этом на каждом шаге получается жёсткая конструкция. А для октаэдра и икосаэдра приходится скреплять соответственно четыре и пять треугольников, т. е. начальная конструкция нежёсткая.

§ 1. Основные свойства

14.1. Докажите, что не существует никаких других правильных многогранников, кроме перечисленных выше.

14.2. Докажите, что существует *додекаэдр* — правильный многогранник с пятиугольными гранями и трёхгранными углами при вершинах.

14.3. Докажите, что все углы между не параллельными гранями додекаэдра равны.

14.4. Докажите, что существует *икосаэдр* — правильный многогранник с треугольными гранями и пятигранными углами при вершинах.

14.5. Докажите, что для любого правильного многогранника существует:

а) сфера, проходящая через все его вершины (описанная сфера);

б) сфера, касающаяся всех его граней (вписанная сфера).

14.6. Докажите, что центр описанной сферы правильного многогранника является его центром масс (т. е. центром масс вершин с единичными массами).

Центр описанной сферы правильного многогранника, совпадающий с центром вписанной сферы и с центром масс, называют *центром* правильного многогранника.

14.7. Докажите, что синус угла, под которым видна сторона икосаэдра из его центра, равен $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

14.8. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — единичные векторы, направленные из центра правильного многогранника в его вершины, а $\boldsymbol{u}$ — произвольный вектор. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{3}n\boldsymbol{u}.$$

14.9. Из точки M, лежащей внутри правильного многогранника с n гранями, опущены перпендикуляры MA_i на плоскости его граней. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{MA_i} = \frac{n}{3}\overrightarrow{MO}$, где O — центр многогранника.

См. также задачи 7.3, 19.9, 19.19, 20.30.

§ 2. Взаимосвязи

14.10. а) Докажите, что можно выбрать четыре вершины куба так, что они будут вершинами правильного тетраэдра. Сколькими способами можно это сделать?

б) Докажите, что можно выбрать четыре плоскости граней октаэдра так, что они будут плоскостями граней правильного тетраэдра. Сколькими способами можно это сделать?

14.11. Докажите, что на рёбрах куба можно выбрать шесть точек так, что они будут вершинами октаэдра.

14.12. а) Докажите, что можно выбрать восемь вершин додекаэдра так, что они будут вершинами куба. Сколькими способами можно это сделать?

б) Докажите, что можно выбрать четыре вершины додекаэдра так, что они будут вершинами правильного тетраэдра.

14.13. а) Докажите, что можно выбрать восемь плоскостей граней икосаэдра так, что они будут плоскостями граней октаэдра. Сколькими способами можно это сделать?

б) Докажите, что можно выбрать шесть плоскости граней икосаэдра так, что они будут плоскостями граней правильного тетраэдра.

§ 3. Двойственные правильные многогранники

14.14. Рассмотрим выпуклый многогранник, вершинами которого являются центры граней некоторого правильного многогранника. Докажите, что этот многогранник тоже является правильным. (Его называют многогранником, *двойственным* исходному.)

14.15. а) Докажите, что тетраэдру двойствен тетраэдр.

б) Докажите, что куб и октаэдр двойственны друг другу.

в) Докажите, что додекаэдр и икосаэдр двойственны друг другу.

14.16. Докажите, что если равны радиусы вписанных сфер двух двойственных друг другу правильных многогранников, то:

а) равны радиусы их описанных сфер;

б) равны радиусы описанных окружностей их граней.

14.17. Грань додекаэдра и грань икосаэдра лежат в одной плоскости, и, кроме того, их противоположные грани тоже лежат в одной плоскости. Докажите, что все остальные вершины додекаэдра и икосаэдра расположены в двух плоскостях, параллельных этим граням.

§ 4. Проекции и сечения

14.18. Докажите, что проекции додекаэдра и икосаэдра на плоскости, параллельные их граням, являются правильными многоугольниками.

14.19. Докажите, что проекция додекаэдра на плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через его центр и середину ребра, является шестиугольником (а не десятиугольником).

14.20. а) Докажите, что проекция икосаэдра на плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через его центр и вершину, является правильным 10-угольником.

б) Докажите, что проекция додекаэдра на плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через его центр и вершину, является неправильным 12-угольником.

14.21. Существует ли сечение куба, являющееся правильным шестиугольником?

14.22. Существует ли сечение октаэдра, являющееся правильным шестиугольником?

14.23. а) Существует ли сечение додекаэдра, являющееся правильным шестиугольником?

б) Сколько существует таких сечений?

14.24. Две грани ABC и ABD икосаэдра имеют общее ребро AB. Через вершину D проводится плоскость, параллельная плоскости ABC. Верно ли, что сечение икосаэдра этой плоскостью является правильным шестиугольником?

§ 5. Самосовмещения правильных многогранников

14.25. Какие правильные многогранники имеют центр симметрии?

14.26. Выпуклый многогранник симметричен относительно некоторой плоскости. Докажите, что она либо проходит через середину его ребра, либо является плоскостью симметрии одного из многогранных углов при вершине.

14.27. а) Докажите, что для любого правильного многогранника плоскости, проходящие через середины его рёбер перпендикулярно им, являются плоскостями симметрии.

б) У каких правильных многогранников есть ещё и другие плоскости симметрии?

14.28. Найдите число плоскостей симметрии каждого из правильных многогранников.

14.29. Докажите, что любая ось вращения правильного многогранника проходит через его центр и либо вершину, либо середину ребра, либо центр грани.

14.30. а) Сколько осей симметрии имеет каждый из правильных многогранников?

б) Сколько других осей вращения имеет каждый из них?

14.31. Сколько самосовмещений (т. е. движений, переводящих многогранник в себя) имеется для каждого из правильных многогранников?

§ 6. Разные определения

14.32. Докажите, что если все грани выпуклого многогранника — равные правильные многоугольники, а все его двугранные углы равны, то этот многогранник правильный.

14.33. Докажите, что если все многогранные углы выпуклого многогранника правильные, а все грани — правильные многоугольники, то этот многогранник правильный.

14.34. Докажите, что если все грани выпуклого многогранника — правильные многоугольники, а концы рёбер, выходящих из каждой вершины, образуют правильный многоугольник, то этот многогранник правильный.

* * *

14.35. Обязательно ли является правильным выпуклый многогранник, у которого равны все грани и все многогранные углы?

14.36. Обязательно ли является правильным выпуклый многогранник, у которого равны:

а) все рёбра и все двугранные углы;

б) все рёбра и все многогранные углы?

Решения

14.1. Рассмотрим произвольный правильный многогранник. Пусть все его грани — правильные n-угольники, а все многогранные углы содержат по m граней. Каждое ребро соединяет две вершины, а из каждой вершины выходит m рёбер. Поэтому $2\text{Р} = m\text{В}$. Аналогично каждое ребро принадлежит двум граням, и каждой грани принадлежит n рёбер. Поэтому $2\text{Р} = n\text{Г}$. Подставив эти выражения в формулу Эйлера $\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2$ (см. задачу 13.20), получим $\frac{2}{m}\text{Р} - \text{Р} + \frac{2}{n}\text{Р} = 2$, т. е. $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Р}} > \frac{1}{2}$. Следовательно, либо $n < 4$, либо $m < 4$. Таким образом, одно из чисел m и n равно 3; обозначим другое число через x. Теперь нужно найти все целочисленные решения уравнения

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Р}}.$$

Ясно, что $x = 6\frac{\text{Р}}{\text{Р}+6} < 6$, т. е. $x = 3, 4, 5$. Следовательно, имеется лишь 5 различных пар чисел (m, n):

1) $(3, 3)$; соответствующий многогранник — *тетраэдр*, у него 6 рёбер, 4 грани и 4 вершины;

2) $(3, 4)$; соответствующий многогранник — *куб*, у него 12 рёбер, 6 граней и 8 вершин;

3) $(4, 3)$; соответствующий многогранник — *октаэдр*, у него 12 рёбер, 8 граней и 6 вершин;

4) $(3, 5)$; соответствующий многогранник — *додекаэдр*, у него 30 рёбер, 12 граней и 20 вершин;

5) $(5, 3)$; соответствующий многогранник — *икосаэдр*, у него 30 рёбер, 20 граней и 12 вершин.

Число рёбер, граней и вершин здесь вычислялось по формулам

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\text{Р}}, \quad \text{Г}=\frac{2}{n}\text{Р} \quad \text{и} \quad \text{В}=\frac{2}{m}\text{Р}.$$

Замечание. Многогранники каждого описанного выше типа определены однозначно с точностью до подобия. Это следует из теоремы Коши о жёсткости выпуклых многогранников (задача 13.43), но здесь можно обойтись и без этой довольно трудной теоремы. В самом деле, преобразованием подобия можно совместить пару граней двух многогранников одного типа так, чтобы многогранники лежали по одну сторону от плоскости совмещённых граней. Если многогранные углы равны, то многогранники, как легко убедиться, совпадут. Равенство многогранных углов очевидно в случае трёхгранных углов, т. е. для тетраэдра, куба и додекаэдра. А для октаэдра и икосаэдра можно совместить двойственные им многогранники, поэтому равны и исходные многогранники (см. задачи 14.5, 14.14 и 14.15).

14.2. Доказательство будет основано на свойствах фигуры, состоящей из трёх одинаковых правильных пятиугольников с общей вершиной, каждые два из которых имеют общее ребро. В решении задачи 12.11 доказано, что выделенные на рис. 12.1 отрезки образуют прямой трёхгранный угол, т. е. рассматриваемую фигуру можно так приложить к кубу, что эти отрезки совпадут с его рёбрами, выходящими из одной вершины (рис. 14.2). Докажем, что полученную фигуру можно достроить до додекаэдра с помощью симметрий относительно плоскостей, параллельных граням куба и проходящих через его центр.

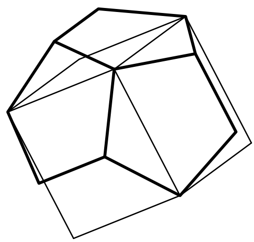


Рис. 14.2

Стороны пятиугольника, параллельные рёбрам куба, симметричны относительно указанных плоскостей. Кроме того, расстояния от каждой из этих сторон до той грани куба, с которой она соединена тремя отрезками, равны; действительно, если мы опустим перпендикуляр из середины стороны на плоскость грани куба, то увидим, что они равны $\sqrt{a^2-b^2}$, где a — длина отрезка, соединяющего вершину правильного пятиугольника с серединой соседней стороны, b — половина диагонали грани куба. Следовательно, с помощью указанных симметрий рассматриваемую фигуру действительно можно достроить до некоторого многогранника. Остаётся доказать, что этот многогранник правильный, т. е. двугранные углы при рёбрах p_i, выходящих из вершин куба, равны двугранным углам при рёбрах q_j, параллельных граням куба. Рассмотрим для этого симметрию относительно плоскости, проходящей через середину ребра p_i перпендикулярно ему. При этой симметрии ребро q_j, выходящее из второго конца ребра p_i и параллельное грани куба, переходит в ребро p_k, выходящее из вершины куба, а кроме того, друг в друга переходят оставшиеся рёбра, выходящие из концов ребра p_i, поэтому двугранный угол при ребре q_j переходит в двугранный угол при ребре p_k.

14.3. Для смежных граней это утверждение очевидно. Если Γ_1 и Γ_2 — несмежные грани додекаэдра, то грань, параллельная Γ_1, будет смежной с Γ_2.

14.4. Икосаэдр будем строить, располагая его вершины на рёбрах октаэдра. Расставим на рёбрах октаэдра стрелки так, как это показано на рис. 14.3, *а*. Теперь поделим все рёбра в одном и том же отношении $\lambda : (1-\lambda)$, учитывая при этом их ориентацию. Полученные точки являются вершинами выпуклого многогранника с треугольными гранями и пятигранными углами при вершинах (рис. 14.3, *б*). Поэтому достаточно подобрать λ так, чтобы этот многогранник был правильным. У него есть два типа рёбер — принадлежащие граням октаэдра и не принадлежащие им. Квадрат длины любого ребра, принадлежащего грани октаэдра, равен $2(1-\lambda)^2 - 2\lambda(1-\lambda)\cos 60^\circ = 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$, а квадрат длины любого ребра, не принадлежащего грани октаэдра, равен $2(1-\lambda)^2 = 2 - 4\lambda + 2\lambda^2$ (при доказательстве последнего равенства нужно учесть, что угол между несоседними рёбрами октаэдра, выходящими из одной вершины, равен 90°). Таким образом, если $3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 2 - 4\lambda + 2\lambda^2$, т. е. $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (отрицательный корень мы отбросили), то все грани полученного многогранника являются правильными треугольниками. Остаётся доказать, что равны все двугранные углы при его рёбрах. Это легко следует из того, что (для любого λ) вершины полученного многогранника равноудалены от центра октаэдра, т. е. лежат на одной сфере.

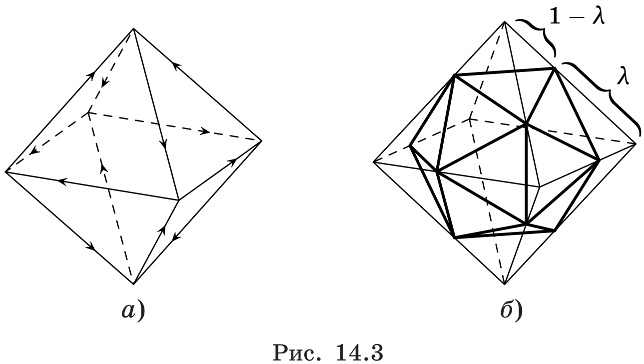


Рис. 14.3

14.5. Проведём через центры всех граней перпендикуляры к ним. Легко убедиться, что для двух соседних граней такие перпендикуляры пересекаются в одной точке, причём она удалена от каждой грани на расстояние $a \operatorname{tg} \varphi$, где a — расстояние от центра грани до её сторон, а φ — половина двугранного угла между гранями многогранника. Для этого нужно рассмотреть сечение, проходящее через центры двух соседних граней и середину их общего ребра (рис. 14.4). Таким образом, на каждом нашем перпендикуляре можно отметить точку, причём для соседних граней эти точки совпадают. Следовательно, все эти перпендикуляры имеют общую точку O.

Ясно, что расстояние от точки O до каждой грани равно $r = a\operatorname{tg}\varphi$, а расстояние от точки O до каждой вершины многогранника равно

$$R = \sqrt{b^2 + r^2},$$

где b — расстояние от центра грани до вершины. Таким образом, точка O является как центром вписанной, так и центром описанной сферы.

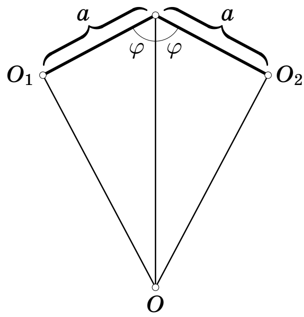


Рис. 14.4

14.6. Нужно доказать, что сумма векторов, соединяющих центр описанной сферы правильного многогранника с его вершинами, равна нулю. Обозначим эту сумму векторов через $\boldsymbol{x}$. При любом повороте, совмещающем многогранник с самим собой, центр описанной сферы остаётся на месте, и поэтому вектор $\boldsymbol{x}$ переходит в себя. Но ненулевой вектор может переходить в себя лишь при повороте вокруг оси, параллельной ему. Остаётся заметить, что у любого правильного многогранника есть несколько осей, повороты вокруг которых переводят его в самого себя.

14.7. Воспользуемся построением икосаэдра, описанным в решении задачи 14.4. Обратимся снова к рис. 14.3, *б*. Из этого рисунка видно, что если мы введём прямоугольную систему координат с началом в центре вспомогательного октаэдра и осями, проходящими через его вершины, то в качестве векторов, идущих из центра икосаэдра в две его соседние вершины, с точностью до пропорциональности можно взять векторы $(0, \lambda, 1-\lambda)$ и $(\lambda, 1-\lambda, 0)$, где число λ определяется в решении задачи 14.4 (оно является положительным корнем квадратного уравнения $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$). Скалярное произведение этих векторов равно $\lambda(1-\lambda)$, поэтому синус угла между ними равен

$$\frac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda^2 + (1-\lambda)^2} = \frac{\lambda(1-\lambda)}{(1-\lambda) + (1-\lambda)^2} = \frac{\lambda}{2-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

14.8. Требуемое утверждение уже было доказано для правильного тетраэдра (задача 11.27) и для октаэдра (задача 11.28). Вершины куба можно разбить на две четвёрки точек, каждая из которых является вершинами правильного тетраэдра. Поэтому рассматриваемая сумма для куба разбивается на две суммы для правильных тетраэдров, и мы получаем требуемое. В случае додекаэдра можно воспользоваться похожими рассуждениями. Из решения задачи 14.2 видно, что можно выбрать восемь вершин додекаэдра так, что они будут вершинами некоторого куба. Если мы рассмотрим все такие кубы, то получим пять кубов, причём каждая вершина будет принадлежать ровно двум кубам. Поэтому, рассматривая суммы векторов для каждого из этих кубов и складывая их, мы получим, что удвоенная сумма векторов для додекаэдра равна $\frac{40}{3}\boldsymbol{u}$, поэтому сумма векторов для додекаэдра равна $\frac{20}{3}\boldsymbol{u}$, что и требовалось.

Для икосаэдра доказательство проведём непосредственно, воспользовавшись результатом задачи 14.7. Рассматриваемая сумма линейно зависит от вектора $\boldsymbol{u}$, который можно представить в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{e}_1, \dots$ $\dots, \boldsymbol{e}_n$, поэтому доказательство достаточно провести для любого из этих векторов, например для вектора $\boldsymbol{e}_1$. Пусть вектор $\boldsymbol{e}_1$ направлен из центра в вершину A, а векторы $\boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_6$ — в соседние с ней вершины. Помимо этих шести векторов у нас ещё есть векторы $-\boldsymbol{e}_1, \dots, -\boldsymbol{e}_6$, но $-(-\boldsymbol{e}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{e}$, поэтому нужно проверить равенство $\sum\limits_{i=1}^{6}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_i = 2\boldsymbol{e}_1$, т. е. равенство $\sum\limits_{i=2}^{6}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_1$. В этой сумме каждое скалярное произведение $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_1)$ равно синусу угла из задачи 14.7, т. е. оно равно $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Таким образом, остаётся проверить равенство $\boldsymbol{e}_2 + \dots + \boldsymbol{e}_6 = \sqrt{5}\boldsymbol{e}_1$. При проекции векторов $\boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_6$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{e}_1$, получаем векторы, сумма которых равна нулю, а при проекции каждого из этих векторов на прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{e}_1$, получаем вектор, длина которого равна синусу угла из задачи 14.7, т. е. она равна $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, причём все эти векторы направлены в одну сторону.

14.9. Решение аналогично решению задачи 11.29. Нужно только воспользоваться не задачей 11.27, а более общим результатом (задача 14.8). Нужно также воспользоваться тем, что выпуклый многогранник, вершины которого расположены в центрах граней правильного многогранника, сам является правильным (задача 14.14).

14.10. а) Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то AB_1CD_1 и $A_1BC_1D_1$ — правильные тетраэдры.

б) Легко проверить, что середины рёбер правильного тетраэдра являются вершинами октаэдра. Из этого видно, что можно выбрать 4 грани октаэдра так, чтобы они были плоскостями граней правильного тетраэдра, причём сделать это можно двумя способами.

14.11. Пусть ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $4a$. Возьмём на рёбрах, выходящих из вершины A, точки, удалённые от неё на расстояние $3a$. Аналогично возьмём 3 точки на рёбрах, выходящих из вершины C_1. Используя равенство $3^2 + 3^2 = 1 + 4^2 + 1$, легко проверить, что длины всех рёбер многогранника с вершинами в выбранных точках равны $3\sqrt{2}a$.

14.12. а) Из решения задачи 14.2 видно, что существует куб, вершины которого находятся в вершинах додекаэдра. При этом на каждой грани додекаэдра расположено одно ребро куба. Ясно также, что выбор в качестве ребра куба любой из пяти диагоналей некоторой грани додекаэдра однозначно задаёт весь куб. Поэтому имеется 5 различных кубов с вершинами в вершинах додекаэдра.

б) Расположив куб так, что его вершины находятся и вершинах додекаэдра, можно затем расположить правильный тетраэдр так, что его вершины находятся в вершинах этого куба.

14.13. а) Из решения задачи 14.4 видно, что можно выбрать восемь граней икосаэдра так, что они будут гранями октаэдра. При этом из каждой вершины икосаэдра выходит ровно одно ребро, не лежащее в плоскости грани октаэдра. Ясно также, что выбор любого из пяти рёбер, выходящих из некоторой вершины икосаэдра, в качестве ребра, не принадлежащего плоскости грани октаэдра, однозначно задаёт октаэдр. Поэтому имеется пять различных октаэдров, плоскости граней которых проходят через грани икосаэдра.

б) Выбрав восемь плоскостей граней икосаэдра так, что они являются плоскостями граней октаэдра, из них можно выбрать четыре плоскости так, что они являются плоскостями граней правильного тетраэдра.

14.14. При повороте относительно прямой, соединяющей вершину исходного многогранника с его центром, переводящем многогранник в себя, центры граней, прилегающих к этой вершине, переходят в себя, т. е. они являются вершинами правильного многоугольника. Аналогично, рассматривая поворот относительно прямой, соединяющей центр грани исходного многогранника с его центром, получаем, что многогранные углы двойственного многогранника правильные. Так как движением можно совместить любые два многогранных угла исходного многогранника, все грани двойственного многогранника равны. А так как можно совместить любые две грани исходного многогранника, равны все многогранные углы двойственного многогранника.

14.15. Для доказательства достаточно заметить, что если у исходного многогранника m-гранные углы при вершинах и n-угольные грани, то у двойственного ему многогранника будут n-гранные углы при вершинах и m-угольные грани.

Замечание. Решения задач 14.2 и 14.4 фактически являются двумя разными решениями одной и той же задачи. В самом деле, если существует додекаэдр, то существует двойственный ему многогранник — икосаэдр (и наоборот).

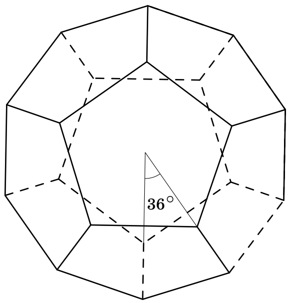
14.16. а) Пусть O — центр исходного многогранника, A — одна из его вершин, B — центр одной из граней с вершиной A. Рассмотрим грань двойственного многогранника, образованного центрами граней исходного многогранника, прилегающего к вершине A. Пусть C — центр этой грани, т. е. точка пересечения этой грани с прямой OA. Ясно, что $AB \perp OB$ и $BC \perp OA$. Поэтому $OC : OB = OB : OA$, т. е. $r_2 : R_2 = r_1 : R_1$, где r_1 и R_1 (соответственно r_2 и R_2) — радиусы вписанной и описанной сфер исходного многогранника (соответственно двойственного ему многогранника).

б) Если плоскость удалена на расстояние r от центра сферы радиуса R, то она высекает на ней окружность радиуса $\sqrt{R^2 - r^2}$. Поэтому радиус описанных окружностей граней многогранника, вписанного в сферу радиуса R и описанного около сферы радиуса r, равен $\sqrt{R^2 - r^2}$. В частности, если у двух многогранников R и r равны, то равны и радиусы описанных окружностей их граней.

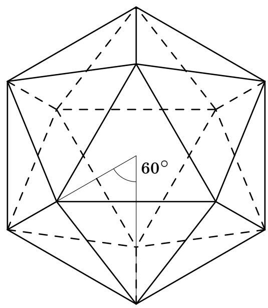
14.17. Если додекаэдр и икосаэдр вписаны в одну сферу, то радиусы их вписанных сфер равны (задача 14.16 (а)), т. е. равны расстояния между их противоположными гранями. Будем называть «центром сферической грани» додекаэдра (или икосаэдра) точку пересечения описанной сферы с прямой, проходящей через его центр и центр одной из граней. Фиксируем один из центров сферических граней додекаэдра и рассмотрим расстояния от него до вершин; среди этих расстояний ровно четыре различных. Для решения задачи достаточно доказать, что этот набор из четырёх различных расстояний совпадает с таким же набором для икосаэдра.

Легко проверить, что центры сферических граней додекаэдра являются вершинами икосаэдра, а центры сферических граней полученного икосаэдра являются вершинами исходного додекаэдра. Поэтому любое расстояние между центром сферической грани и вершиной додекаэдра является расстоянием между вершиной и центром сферической грани икосаэдра.

14.18. Для доказательства достаточно заметить, что эти многогранники переходят в себя при повороте, совмещающем проекцию верхней грани с проекцией нижней грани. Таким образом, проекция додекаэдра является 10-угольником, переходящим в себя при повороте на 36° (рис. 14.5, *а*), а проекция икосаэдра является шестиугольником, переходящим в себя при повороте на 60° (рис. 14.5, *б*).



а)



б)

Рис. 14.5

14.19. Рассмотрим куб, вершины которого расположены в вершинах додекаэдра (см. задачу 14.2). В нашей задаче речь идёт о проекции на плоскость, параллельную грани этого куба. Теперь легко убедиться, что проекцией додекаэдра действительно является шестиугольник (рис. 14.6).

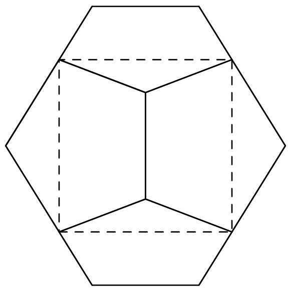
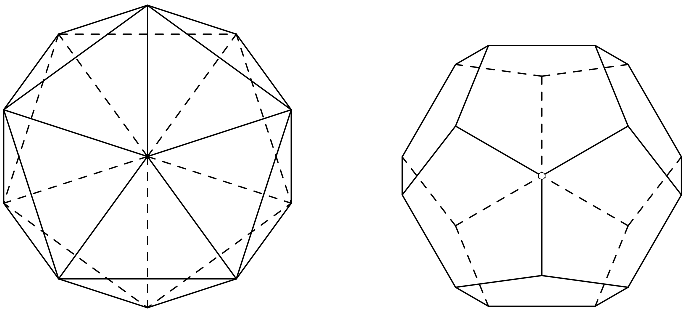


Рис. 14.6

14.20. а) Рассматриваемая проекция икосаэдра переходит в себя при повороте на 36° (при этом проекции верхних граней переходят в проекции нижних граней). Следовательно, она является правильным 10-угольником (рис. 14.7, *а*).

б) Рассматриваемая проекция додекаэдра является 12-угольником, переходящим в себя при повороте на 60° (рис. 14.7, *б*). Половина его сторон является проекциями рёбер, параллельных плоскости проекции, а другая половина сторон — проекциями рёбер, не параллельных плоскости проекции. Следовательно, этот 12-угольник неправильный.



а) *б*)

Рис. 14.7

14.21. Ответ: существует. Середины указанных на рис. 14.8 рёбер куба являются вершинами правильного шестиугольника. Это следует из того, что стороны этого шестиугольника параллельны сторонам правильного треугольника *PQR*, а их длины вдвое меньше длин сторон этого треугольника.

14.22. Ответ: существует. Проведём плоскость, параллельную противоположным граням октаэдра и равноудалённую от них. Легко проверить, что сечение этой плоскостью будет правильным шестиугольником (на рис. 14.9 изображена проекция на секущую плоскость).

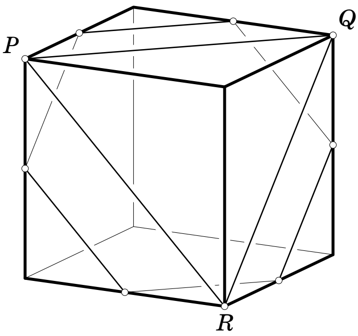


Рис. 14.8

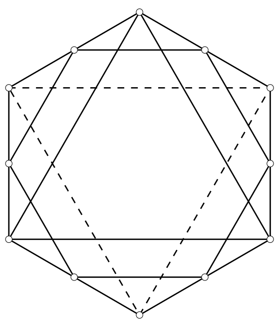


Рис. 14.9

14.23. а) Ответ: существует. Возьмём три пятиугольные грани с общей вершиной A и рассмотрим сечение плоскостью, пересекающей эти грани и параллельной плоскости, в которой лежат три попарно общие вершины рассматриваемых граней (рис. 14.10). Это сечение является шестиугольником с попарно параллельными противоположными сторонами. При повороте на 120° относительно оси, проходящей через вершину A и перпендикулярной секущей плоскости, додекаэдр и секущая плоскость переходят в себя. Поэтому сечение является выпуклым шестиугольником с углами 120°, длины сторон которого, чередуясь, принимают два значения. Для того чтобы этот шестиугольник был правильный, достаточно, чтобы эти два значения были равны. Когда секущая плоскость движется от одного своего крайнего положения до другого, удаляясь от вершины A, первое из этих значений возрастает от 0 до d, а второе убывает от d до a, где a — длина ребра додекаэдра, d — длина диагонали грани ($d > a$). Поэтому в некоторый момент эти значения равны, т. е. сечение является правильным шестиугольником.

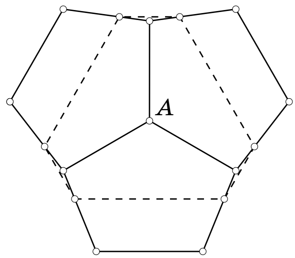


Рис. 14.10

б) Ответ: 30. У додекаэдра 20 вершин, поэтому у него 10 больших диагоналей. Прежде всего заметим, что для каждой из этих 10 больших диагоналей додекаэдра есть ровно три различные плоскости, перпендикулярные этой диагонали и высекающие правильный шестиугольник. Если мы будем двигать параллельно секущую плоскость из задачи а) от одной вершины додекаэдра к противоположной вершине, то в определённый момент получающийся в сечении шестиугольник станет правильным. Потом мы снова получаем неправильный шестиугольник, который станет правильным, когда мы дойдём до центра додекаэдра (рис. 14.11); после этого всё повторится в обратном порядке.

Остаётся проверить, что плоскость, не перпендикулярная большим диагоналям додекаэдра, не может высекать правильный шестиугольник. Предположим, что плоскость пересекает додекаэдр по правильному шестиугольнику.

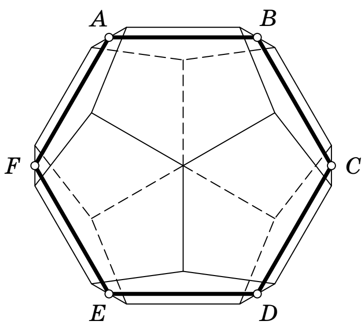


Рис. 14.11

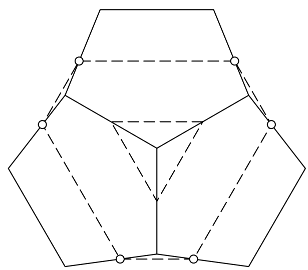


Рис. 14.12

Две грани додекаэдра могут быть: 1) смежными; 2) несмежными, но граничащими с одной и той же гранью; 3) противоположными. Поэтому достаточно рассмотреть следующие случаи расположения параллельные сторон правильного шестиугольника: 1) они лежат на двух смежных гранях; 2) они лежат на двух несмежных гранях, граничащих с одной и той же гранью; 3) они лежат на двух противоположных гранях.

В первом случае стороны шестиугольника параллельны общему ребру. У додекаэдра нет трёх рёбер, параллельных трём разным направлениям сторон правильного шестиугольника. Поэтому хотя бы для одной пары параллельных сторон имеет место второй или третий случай.

Разберём второй случай. В этом случае данные грани граничат с двумя общими гранями, и плоскости двух данных граней пересекаются по прямой, параллельной диагоналям данных граней, соединяющим вершины общих граней. Поэтому мы имеет такую ситуацию, как на рис. 14.12: плоскость сечения параллельна плоскости, в которой лежат концы трёх рёбер додекаэдра, выходящих из одной вершины.

Наконец, разберём третий случай. В этом случае для остальных двух пар параллельных сторон шестиугольника заведомо не может иметь место первый случай, и, как видно из приведённого выше разбора второго случая, он тоже не может встретиться. Таким образом, все три пары параллельных сторон шестиугольника лежат на противоположных гранях додекаэдра. Несложная проверка показывает, что тогда плоскость Π не может пересекать грань по отрезку, соединяющему смежные рёбра, а тогда она должна пересекать именно такой набор граней, как на рис. 14.11. Покажем, что в этом случае плоскость Π проходит через вершины шестиугольника $ABCDEF$ (середины рёбер). Предположим, что это не так. Тогда найдутся три последовательные вершины шестиугольника $ABCDEF$, лежащие по одну сторону от плоскости Π (возможно, одна из этих вершин лежит в плоскости Π, но две другие не лежат). Следовательно, в сечении получается шестиугольник, у которого одна сторона меньше стороны шестиугольника $ABCDEF$, а другая больше. Приходим к противоречию.

14.24. Ответ: нет, неверно. Рассмотрим проекцию икосаэдра на плоскость ABC. Она является правильным шестиугольником (см. задачу 14.18 и рис. к ней). Поэтому рассматриваемое сечение было бы правильным шестиугольником, лишь если бы все шесть вершин, соединённых рёбрами с точками A, B и C (и отличных от A, B и C), лежали в одной плоскости. Но, как легко убедиться, это неверно (иначе получилось бы, что все вершины икосаэдра расположены на трёх параллельных плоскостях).

14.25. Легко проверить, что все правильные многогранники, кроме тетраэдра, имеют центр симметрии.

14.26. Плоскость симметрии разрезает многогранник на две части, поэтому она пересекает хотя бы одно ребро. Рассмотрим два случая.

1. Плоскость симметрии проходит через вершину многогранника. Тогда она является плоскостью симметрии многогранного угла при этой вершине.

2. Плоскость симметрии проходит через неконцевую точку ребра. Тогда это ребро переходит в себя при симметрии относительно этой плоскости, т. е. плоскость проходит через середину ребра перпендикулярно ему.

14.27. а) Для тетраэдра, куба и октаэдра утверждение задачи очевидно. Для додекаэдра и икосаэдра нужно воспользоваться решениями задач 14.2 и 14.4 соответственно. Для додекаэдра при этом удобно рассмотреть плоскость, проходящую через середину ребра, параллельного грани куба, а для икосаэдра — плоскость, проходящую через середину ребра, не лежащего в плоскости грани октаэдра.

б) Нужно выяснить, для каких многогранных углов правильных многогранников существуют плоскости симметрии, не проходящие через середины рёбер. Любая плоскость симметрии многогранных углов тетраэдра, додекаэдра и икосаэдра проходит через середины рёбер. У куба и октаэдра есть плоскости симметрии многогранных углов, не проходящие через середины рёбер. Эти плоскости проходят через пары противоположных рёбер.

14.28. Сначала рассмотрим плоскости симметрии, проходящие через середины рёбер перпендикулярно им. Нужно выяснить, через сколько середин сразу проходит такая плоскость, Легко проверить, что для тетраэдра каждая плоскость проходит через середину одного ребра, для октаэдра, додекаэдра и икосаэдра — через середины двух рёбер, а для куба — через середины четырёх рёбер. Поэтому число таких плоскостей для тетраэдра равно 4, для куба — $\frac{12}{4}=3$, для октаэдра — $\frac{12}{2}=6$, для додекаэдра и икосаэдра — $\frac{30}{2}=15$.

У куба и октаэдра есть ещё и другие плоскости симметрии, проходящие через пары противоположных рёбер, причём для куба такая плоскость проходит через два ребра, а для октаэдра — через четыре. Поэтому число таких плоскостей для куба равно $\frac{12}{2}=6$, а для октаэдра — $\frac{12}{4}=3$. Всего у куба и октаэдра по девять плоскостей симметрии.

14.29. Ось вращения пересекает поверхность многогранника в двух точках. Рассмотрим одну из них. Возможны три варианта.

1. Точка является вершиной многогранника.

2. Точка принадлежит ребру многогранника, но не является вершиной. Тогда это ребро переходит в себя при некотором повороте относительно неё. Следовательно, эта точка является серединой ребра, причём угол поворота равен 180°.

3. Точка принадлежит грани многогранника, но не принадлежит ребру. Тогда эта грань переходит в себя при некотором повороте относительно неё. Следовательно, эта точка является центром грани.

14.30. а) Для каждого правильного многогранника прямые, проходящие через середины противоположных рёбер, являются их осями симметрии. В тетраэдре таких осей три, в кубе и октаэдре — шесть, в додекаэдре и икосаэдре — 15. Кроме того, в кубе осями симметрии являются прямые, проходящие через центры граней, а в октаэдре — прямые, проходящие через вершины; таких осей у них по три.

б) Прямая называется осью вращения n-го порядка (для данной фигуры), если при повороте на угол $\frac{2\pi}{n}$ фигура переходит в себя.

Прямые, проходящие через вершины и центры граней тетраэдра, являются осями третьего порядка; этих осей четыре.

Прямые, проходящие через пары вершин куба, являются осями третьего порядка; этих осей четыре. Прямые, проходящие через пары центров граней куба, являются осями четвёртого порядка; этих осей три.

Прямые, проходящие через пары центров граней октаэдра, являются осями третьего порядка; этих осей четыре. Прямые, проходящие через пары вершин октаэдра, являются осями четвёртого порядка; этих осей три.

Прямые, проходящие через пары вершин додекаэдра, являются осями третьего порядка; этих осей десять. Прямые, проходящие через пары центров граней додекаэдра, являются осями пятого порядка; этих осей шесть.

Прямые, проходящие через пары центров граней икосаэдра, являются осями третьего порядка; этих осей десять. Прямые, проходящие через пары вершин икосаэдра, являются осями пятого порядка; этих осей шесть.

14.31. Любую грань правильного многогранника можно перевести движением в любую другую. Если грани многогранника n-угольные, то имеется ровно $2n$ самосовмещений, сохраняющих одну из граней: n поворотов и n симметрий относительно плоскостей. Поэтому число самосовмещений (включая тождественное преобразование) равно $2n\Gamma$.

Число самосовмещений тетраэдра равно 24, куба и октаэдра — 48, додекаэдра и икосаэдра — 120.

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно показать, что число самосовмещений правильного многогранника равно удвоенному произведению числа его вершин на число граней его многогранных углов.

14.32. Нужно доказать, что равны все многогранные углы нашего многогранника. Но его двугранные углы равны по условию, а плоские углы являются углами равных многоугольников.

14.33. Нужно доказать, что все грани равны и многогранные углы тоже равны. Докажем сначала равенство граней. Рассмотрим все грани, сходящиеся в некоторой вершине. Многогранный угол при этой вершине правильный, поэтому равны все его плоские углы, а значит, равны углы рассматриваемых правильных многоугольников. Кроме того, все стороны правильных многоугольников, имеющих общую сторону, равны. Следовательно, все рассматриваемые многоугольники равны, а значит, равны и все грани многогранника.

Докажем теперь равенство многогранных углов. Рассмотрим все многогранные углы при вершинах одной из граней. Одним из плоских углов каждого из них является угол этой грани, поэтому все плоские углы рассматриваемых многогранных углов равны. Кроме того, многогранные углы, вершинами которых являются концы одного ребра, имеют общий двугранный угол, поэтому равны все их двугранные углы. Следовательно, рассматриваемые многогранные углы равны, а значит, равны и все многогранные углы нашего многогранника.

14.34. Нужно доказать, что все многогранные углы нашего многогранника правильные. Рассмотрим концы всех рёбер, выходящих из некоторой вершины. Как следует из условия задачи, многогранник с вершинами в этих точках и точке A является пирамидой, основание которой — правильный многоугольник, причём все рёбра пирамиды равны. Поэтому точка A принадлежит пересечению плоскостей, проходящих через середины сторон основания перпендикулярно им, т. е. она лежит на перпендикуляре к основанию, проходящему через его центр. Следовательно, пирамида правильная, а значит, многогранный угол при её вершине правильный.

14.35. О т в е т: нет, не обязательно. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отличный от куба. В тетраэдре AB_1CD_1 все грани и все трёхгранные углы равны, но он не является правильным.

14.36. О т в е т: нет, не обязательно. Рассмотрим выпуклый многогранник, вершинами которого являются середины рёбер куба. Легко проверить, что у этого многогранника равны все рёбра, все двугранные углы и все многогранные углы.

ГЛАВА 15

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Длины и периметры

15.1. Пусть a и b — длины двух скрещивающихся рёбер тетраэдра. Докажите, что для радиуса r вписанной сферы этого тетраэдра выполняется неравенство $r < \dfrac{ab}{2(a+b)}$.

15.2. Пусть a, b и c — длины сторон параллелепипеда, d — одна из его диагоналей. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant \dfrac{d^2}{3}$.

15.3. Дан куб с ребром 1. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки до всех его вершин не меньше $4\sqrt{3}$.

15.4. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине A равны 60°. Докажите, что $AB+AC+AD \leqslant BC+CD+DB$.

15.5. Из точек A_1, A_2 и A_3, лежащих на прямой a, опущены перпендикуляры A_iB_i на прямую b. Докажите, что если точка A_2 лежит между A_1 и A_3, то длина отрезка A_2B_2 заключена между длинами отрезков A_1B_1 и A_3B_3.

15.6. Внутри выпуклого многогранника находится отрезок. Докажите, что его длина не превосходит длины наибольшего отрезка с концами в вершинах многогранника.

15.7. Пусть P — проекция точки M на плоскость, содержащую точки A, B и C. Докажите, что если из отрезков PA, PB и PC можно составить треугольник, то из отрезков MA, MB и MC тоже можно составить треугольник.

15.8. Пусть A, B и C — вершины правильного треугольника, а M — произвольная точка в пространстве. Докажите, что из отрезков MA, MB и MC можно составить треугольник, причём этот треугольник вырожденный тогда и только тогда, когда точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC.

15.9. Внутри выпуклого многогранника взяты точки P и Q. Докажите, что хотя бы одна из вершин многогранника менее удалена от Q, чем от P.

15.10. Точка O расположена внутри тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин отрезков OA, OB, OC и OD не превосходит суммы длин рёбер тетраэдра.

15.11. Точка Q расположена на отрезке PR, а точки A и B лежат вне прямой PR. Докажите, что периметр треугольника ABQ меньше периметра одного из треугольников ABP и ABR.

15.12. Внутри куба с ребром 1 расположено несколько отрезков, причём любая плоскость, параллельная одной из граней куба, пересекает не более одного отрезка. Докажите, что сумма длин этих отрезков не превосходит 3.

15.13. Замкнутая ломаная проходит по поверхности куба с ребром 1 и имеет общие точки со всеми его гранями. Докажите, что её длина не меньше $3\sqrt{2}$.

15.14. Предположим, что у тетраэдра есть два ребра наибольшей длины, причём эти рёбра противоположные. Докажите, что тогда из трёх рёбер, выходящих из некоторой вершины тетраэдра, можно составить остроугольный треугольник.

15.15. Сечение правильного тетраэдра — четырёхугольник. Докажите, что периметр этого четырёхугольника заключён между $2a$ и $3a$, где a — длина ребра тетраэдра.

15.16. а) Докажите, что периметр любого треугольного сечения тетраэдра не превосходит периметра одной из его граней.

б) Докажите, что периметр любого четырёхугольного сечения тетраэдра не превосходит периметра одной из его граней.

См. также задачи 1.33, 2.7, 2.35, 7.7, 11.2, 11.20, 11.57, 11.58, 12.18.

§ 2. Углы

15.17. Докажите, что сумма углов пространственного четырёхугольника не превосходит 360°.

15.18. Докажите, что не более одной вершины тетраэдра обладает тем свойством, что сумма любых двух плоских углов при этой вершине больше 180°.

15.19. Точка O лежит на основании треугольной пирамиды $SABC$. Докажите, что сумма углов между лучом SO и боковыми рёбрами меньше суммы плоских углов при вершине S и больше половины этой суммы.

15.20. а) Докажите, что сумма углов между рёбрами трёхгранного угла и плоскостями противолежащих им граней не превосходит суммы его плоских углов.

б) Докажите, что если двугранные углы трёхгранного угла острые, то сумма углов между его рёбрами и плоскостями противолежащих им граней не меньше полусуммы его плоских углов.

15.21. Даны две треугольные пирамиды $ABCD$ и $A'BCD$ с общим основанием BCD, причём точка A' лежит внутри пирамиды $ABCD$. Докажите, что сумма плоских углов при вершине A' пирамиды $A'BCD$ больше суммы плоских углов при вершине A пирамиды $ABCD$.

15.22. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его рёбрами углы α, β и γ. Докажите, что $\alpha+\beta+\gamma<\pi$.

15.23. Все плоские углы выпуклого четырёхгранного угла равны 60°. Докажите, что углы между его противоположными рёбрами не могут быть одновременно острыми или одновременно тупыми.

15.24. Докажите, что сумма углов, под которыми видны рёбра тетраэдра из произвольной точки, лежащей внутри его, больше 3π.

15.25. а) Докажите, что сумма двугранных углов при четырёх рёбрах AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ меньше 2π.

б) Докажите, что сумма двугранных углов тетраэдра заключена строго между 2π и 3π.

15.26. Докажите что сумма величин телесных углов трёхгранных углов тетраэдра меньше 2π.

15.27. В тетраэдре $ABCD$ пары рёбер AC и BC, AD и BD перпендикулярны. Докажите, что косинус угла между прямыми AC и BD меньше $\dfrac{CD}{AB}$.

15.28. Пространство полностью покрыто конечным набором прямых круговых конусов (бесконечных в одну сторону) с углами раствора $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Докажите, что $\varphi_1^2+\ldots+\varphi_n^2 \geqslant 16$.

§ 3. Площади

15.29. Докажите, что площадь любой грани тетраэдра меньше суммы площадей трёх остальных его граней.

15.30. Один выпуклый многогранник лежит внутри другого. Докажите, что площадь поверхности внешнего многогранника больше площади поверхности внутреннего.

15.31. Докажите, что для любого тетраэдра найдутся две такие плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на них не меньше $\sqrt{2}$.

15.32. а) Докажите, что площадь любого треугольного сечения тетраэдра не превосходит площади одной из его граней.

б) Докажите, что площадь любого четырёхугольного сечения тетраэдра не превосходит площади одной из его граней.

15.33. Плоскость, касающаяся вписанной в куб сферы, отсекает от него треугольную пирамиду. Докажите, что площадь поверхности этой пирамиды не превосходит площади грани куба.

См. также задачи 11.54, 11.55.

§ 4. Объёмы

15.34. На каждом ребре тетраэдра отмечено по одной точке. Рассмотрим четыре тетраэдра, одна из вершин каждого из которых является вершиной исходного тетраэдра, а остальные его вершины — отмеченные точки, лежащие на рёбрах, выходящих из этой вершины, Докажите, что объём одного из них не превосходит $\frac{1}{8}$ объёма исходного тетраэдра.

15.35. Длины пяти рёбер тетраэдра не превосходят 1. Докажите, что его объём не превосходит $\frac{1}{8}$.

15.36. Объём выпуклого многогранника равен V, а площадь поверхности S.

а) Докажите, что если внутри его расположена сфера радиуса r, то $\frac{V}{S} \geqslant \frac{r}{3}$.

б) Докажите, что внутри его можно расположить сферу радиуса $\frac{V}{S}$.

в) Один выпуклый многогранник расположен внутри другого. Пусть V_1 и S_1 — объём и площадь поверхности внешнего многогранника, V_2 и S_2 — внутреннего. Докажите, что $\frac{3V_1}{S_1} \geqslant \frac{V_2}{S_2}$.

15.37. Внутри куба расположен выпуклый многогранник, проекция которого на каждую грань куба совпадает с этой гранью. Докажите, что объём многогранника не меньше $\frac{1}{3}$ объёма куба.

15.38. Площади проекций тела на координатные плоскости равны S_1, S_2 и S_3. Докажите, что его объём не превосходит $\sqrt{S_1S_2S_3}$.

§ 5. Разные задачи

15.39. Докажите, что радиус вписанной окружности любой грани тетраэдра больше радиуса его вписанной сферы.

15.40. На основании треугольной пирамиды $OABC$ с вершиной O взята точка M. Докажите, что

$$OM\cdot S_{ABC}\leqslant OA\cdot S_{MBC}+OB\cdot S_{MAC}+OC\cdot S_{MAB}.$$

15.41. Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной сфер правильной четырёхугольной пирамиды. Докажите, что $\dfrac{R}{r}\geqslant 1+\sqrt{2}$.

15.42. Сечения M_1 и M_2 выпуклого центрально симметричного многогранника параллельны, причём M_1 проходит через центр симметрии.

а) Верно ли, что площадь сечения M_1 не меньше площади сечения M_2?

б) Верно ли, что радиус наименьшей окружности, содержащей M_1, не меньше радиуса наименьшей окружности, содержащей M_2?

15.43. Внутри сферы радиуса R находится выпуклый многогранник. Длина его i-го ребра равна l_i, двугранный угол при этом ребре равен φ_i. Докажите, что

$$\sum l_i(\pi-\varphi_i)\leqslant 8\pi R.$$

Решения

15.1. Пусть V — объём тетраэдра, S — площадь поверхности. Тогда $r=\dfrac{3V}{S}$. Оценим V и S, используя помимо a и b расстояние d между скрещивающимися прямыми, содержащими данные рёбра. Согласно задаче 3.4 имеем $V\leqslant\dfrac{abd}{6}$. Высоты обоих граней с ребром a не меньше d, причём хотя бы одна из них больше d. Поэтому площадь двух граней с общим ребром a больше ad. Аналогично площадь двух граней с общим ребром b больше bd. Следовательно, $S>(a+b)d$, и

$$r=\frac{3V}{S}<\frac{3abd}{6(a+b)d}=\frac{ab}{2(a+b)}.$$

15.2. Так как $d\leqslant a+b+c$, то

$$d^2\leqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2ca\leqslant 3(a^2+b^2+c^2).$$

15.3. Если PQ — диагональ куба с ребром 1, а X — произвольная точка, то $PX+QX\geqslant PQ=\sqrt{3}$. Так как у куба 4 диагонали, сумма расстояний от точки X до всех вершин куба не меньше $4\sqrt{3}$.

15.4. Докажем сначала, что если $\angle BAC = 60^\circ$, то $AB + AC \leqslant 2BC$. Рассмотрим для этого точки B' и C', симметричные точкам B и C относительно биссектрисы угла A. Так как в любом выпуклом четырёхугольнике сумма длин диагоналей больше суммы длин пары противоположных сторон, то $BC + B'C' \geqslant$ $\geqslant CC' + BB'$ (равенство достигается, если $AB = AC$). Остаётся заметить, что $B'C' = BC$, $CC' = AC$ и $BB' = AB$. Аналогично доказываются неравенства $AC +$ $+ AD \leqslant 2CD$ и $AD + AB \leqslant 2DB$. Складывая все эти неравенства, получаем требуемое.

15.5. Проведем через прямую b плоскость Π, параллельную a. Пусть C_i — проекция точки A_i на плоскость Π. По теореме о трёх перпендикулярах $C_iB_i \perp b$, поэтому длина отрезка B_2C_2 заключена между B_1C_1 и B_3C_3; длины всех трёх отрезков A_iC_i равны.

15.6. При доказательстве мы несколько раз будем использовать следующее планиметрическое утверждение: «Если точка X лежит на стороне BC треугольника ABC, то либо $AB \geqslant AX$, либо $AC \geqslant AX$». (В самом деле, один из углов BXA или CXA не меньше 90°; если $\angle BXA \geqslant 90^\circ$, то $AB \geqslant AX$, а если $\angle CAX \geqslant 90^\circ$, то $AC \geqslant AX$.)

Продолжим данный отрезок до пересечения с гранями многогранника в некоторых точках P и Q; при этом его длина может только увеличиться. Пусть MN — произвольный отрезок с концами на рёбрах многогранника, проходящий через точку P. Тогда либо $MQ \geqslant PQ$, либо $NQ \geqslant PQ$. Пусть для определённости $MQ \geqslant PQ$. Точка M лежит на некотором ребре AB, и либо $AQ \geqslant MQ$, либо $BQ \geqslant MQ$. Мы заменили отрезок PQ на больший отрезок, один из концов которого лежит в вершине многогранника. Проведя теперь точно такие же рассуждения для конца Q полученного отрезка, мы заменим отрезок PQ на больший отрезок с концами в вершинах многогранника.

15.7. Пусть $a = PA$, $b = PB$ и $c = PC$. Можно считать, что $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда по условию $c < a + b$. Пусть, далее, $h = PM$. Требуется доказать, что

$$c\sqrt{1 + \left(\frac{h}{c}\right)^2} < a\sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} + b\sqrt{1 + \left(\frac{h}{b}\right)^2}.$$

Остаётся заметить, что

$$c\sqrt{1 + \left(\frac{h}{c}\right)^2} < (a + b)\sqrt{1 + \left(\frac{h}{c}\right)^2} \leqslant a\sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} + b\sqrt{1 + \left(\frac{h}{b}\right)^2}.$$

15.8. Пусть P — проекция точки M на плоскость ABC. Тогда из отрезков PA, PB и PC можно составить треугольник, причём этот треугольник вырожденный тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC (см. «Задачи по планиметрии», задача 18.23). Поэтому согласно задаче 15.7 из отрезков MA, MB и MC тоже можно составить треугольник; возвращаясь к решению этой задачи, легко убедиться, что если треугольник, составленный из отрезков PA, PB и PC, вырожденный, но при этом точка M не лежит в плоскости ABC, то неравенство получается строгое, т. е. треугольник, составленный из отрезков MA, MB и MC, невырожденный.

15.9. Рассмотрим плоскость Π, проходящую через середину отрезка PQ перпендикулярно ему. Предположим, что все вершины многогранника удалены от точки Q не менее, чем от точки P. Тогда все вершины многогранника лежат по ту же сторону от плоскости Π, что и точка P. Следовательно, точка Q лежит вне многогранника, что противоречит условию.

15.10. Пусть M и N — точки пересечения плоскостей AOB и COD с рёбрами CD и AB соответственно (рис. 15.1). Так как треугольник AOB лежит внутри треугольника AMB, то $AO+BO \leqslant AM+BM$. Аналогично

$$CO+DO \leqslant CN+DN.$$

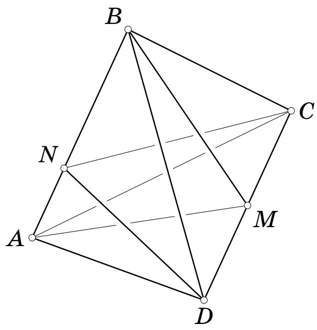


Рис. 15.1

Поэтому достаточно доказать, что сумма длин отрезков AM, BM, CN и DN не превосходит суммы длин рёбер тетраэдра $ABCD$.

Докажем сначала, что если X — точка на стороне $A'B'$ треугольника $A'B'C'$, то длина отрезка $C'X$ не превосходит половины периметра треугольника $A'B'C'$. В самом деле, $C'X \leqslant C'B'+B'X$ и $C'X \leqslant C'A+A'X$. Поэтому $2C'X \leqslant A'B'+B'C'+C'A'$. Таким образом, $2AM \leqslant AC+CD+DA$, $2BM \leqslant BC+CD+DB$, $2CN \leqslant BA+AC+CB$ и $2DN \leqslant BA+AD+DB$. Складывая все эти неравенства, получаем требуемое.

15.11. Будем вращать точку B вокруг прямой PR. Ясно, что если требуемое утверждение верно для одного положения точки B, то оно верно и для любого другого её положения. Действительно, при таком вращении изменяется только длина отрезка AB, но при сравнении периметров треугольников она взаимно уничтожается. Таким образом, можно считать, что точка B лежит в плоскости APR, причём точки A и B лежат по разные стороны от прямой PR. Тогда треугольник ABQ лежит внутри одного из треугольников ABP и ABR, а периметр внутреннего треугольника всегда меньше периметра внешнего.

15.12. Занумеруем отрезки и рассмотрим отрезок с номером i. Пусть l_i — его длина, а x_i, y_i, z_i — длины проекций на рёбра куба. Легко проверить, что $l_i \leqslant x_i+y_i+z_i$. С другой стороны, если любая плоскость, параллельная грани куба, пересекает не более одного отрезка, то проекции этих отрезков на каждое ребро куба не имеют общих точек. Поэтому $\sum x_i \leqslant 1$, $\sum y_i \leqslant 1$ и $\sum z_i \leqslant 1$, а значит, $\sum l_i \leqslant 3$.

15.13. Рассмотрим проекции на три непараллельных ребра куба. Проекция данной ломаной на любое ребро содержит оба конца ребра, поэтому она совпадает с самим ребром. Следовательно, сумма длин проекций звеньев ломаной на любое ребро не менее 2, а сумма длин проекций звеньев ломаной на все три ребра не менее 6.

Одна из трёх длин проекций любого звена ломаной на ребро куба нулевая; пусть две другие длины проекций равны a и b. Так как $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, то сумма длин звеньев ломаной не меньше суммы длин проекций звеньев ломаной на три ребра куба, делённой на $\sqrt{2}$, а значит, она не меньше $\frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

15.14. Пусть OA и BC — наибольшие рёбра тетраэдра $OABC$. Предположим, что из каждой тройки рёбер тетраэдра нельзя составить остроугольный треугольник. Тогда

$$OA^2 \geqslant OB^2 + OC^2, \quad BC^2 \geqslant OB^2 + AB^2,$$
$$OA^2 \geqslant AB^2 + AC^2, \quad BC^2 \geqslant OC^2 + AC^2.$$

(Если нельзя составить вообще никакой треугольник, то соответствующее неравенство заведомо выполняется.) Складывая эти неравенства, получаем

$$OA^2 + BC^2 \geqslant OB^2 + OC^2 + AB^2 + AC^2.$$

Подставим в это неравенство выражения

$$BC^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 = OC^2 + OB^2 - 2(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}),$$
$$AB^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = OB^2 + OA^2 - 2(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}),$$
$$AC^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})^2 = OC^2 + OA^2 - 2(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}).$$

В результате получим

$$0 \geqslant OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) - 2(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) - 2(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|^2.$$

Следовательно, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$, т. е. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$. В частности, точки O, A, B и C лежат в одной плоскости, а это противоречит тому, что они являются вершинами тетраэдра.

15.15. Рассмотрим все сечения тетраэдра плоскостями, параллельными данному сечению. Те из них, которые являются четырёхугольниками, при

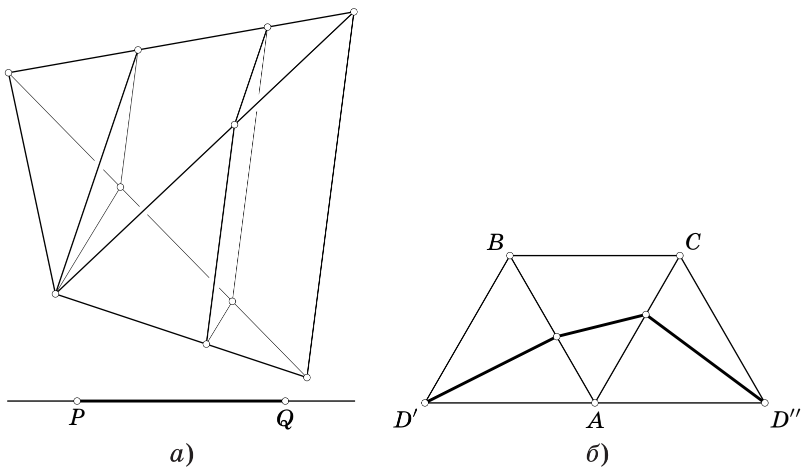


Рис. 15.2

проецировании на прямую, перпендикулярную плоскостям сечений, попадают во внутренние точки некоторого отрезка PQ, причём точкам P и Q соответствуют сечения плоскостями, проходящими через вершины тетраэдра (рис. 15.2, *а*). Длина стороны сечения, принадлежащей фиксированной грани тетраэдра, является линейной функцией на отрезке PQ. Поэтому периметр сечения, как сумма линейных функций, является линейной функцией на отрезке PQ. Значение линейной функции в произвольной точке отрезка PQ заключено между её значениями в точках P и Q. Поэтому достаточно проверить, что периметр сечения правильного тетраэдра плоскостью, проходящей через его вершину, заключён между $2a$ и $3a$ (кроме случая, когда сечение состоит из единственной точки; но такое сечение не может соответствовать точкам P и Q). Если сечение является ребром тетраэдра, то для него значение рассматриваемой линейной функции равно $2a$.

Так как длина любого отрезка с концами на сторонах правильного треугольника не превосходит длины его стороны, периметр треугольного сечения тетраэдра не превосходит $3a$.

Если плоскость сечения проходит через вершину D тетраэдра $ABCD$ и пересекает рёбра AB и AC, то развернём грани ABD и ACD на плоскость ABC (рис. 15.2, *б*). Стороны сечения соединяют точки D' и D'', поэтому сумма их длин не меньше $D'D''=2a$.

15.16. а) Плоскость треугольного сечения тетраэдра отделяет одну его вершину от остальных, т. е. пересекает три ребра, выходящие из одной вершины. Пусть для определённости она пересекает рёбра, выходящие из вершины A. Плоскость сечения можно отодвигать от точки A параллельно себе самой, до тех пор пока она не пройдёт через одну из остальных вершин тетраэдра; при этом сечение будет оставаться треугольным и его периметр будет увеличиваться. Пусть для определённости плоскость сечения проходит через вершину B и пересекает рёбра AC и AD в точках M и N. Будем обозначать периметр треугольника ABC через P_{ABC}. Согласно задаче 15.11 выполняется либо неравенство $P_{BMN} \leqslant P_{BMA}$, либо неравенство $P_{BMN} \leqslant P_{BMD}$. В первом случае доказательство сразу завершается, поскольку $P_{BMA} \leqslant P_{BCA}$. Во втором случае ещё раз воспользуемся задачей 15.11. В результате получим, что выполняется либо неравенство $P_{BMD} \leqslant P_{BAD}$, либо неравенство $P_{BMD} \leqslant P_{BCD}$, и доказательство снова завершено.

б) Такие же рассуждения, как при решении задачи 15.15, показывают, что периметр четырёхугольного сечения тетраэдра не превосходит периметра треугольного сечения или удвоенного ребра тетраэдра. Поэтому требуемое утверждение следует из задачи а).

З а м е ч а н и е. Ср. с задачей 15.32.

15.17. Если вершины пространственного четырёхугольника $ABCD$ не лежат в одной плоскости, то $\angle ABC < \angle ABD + \angle DBC$ и $\angle ADC < \angle ADB + \angle BDC$ (см. задачу 6.5). Складывая эти неравенства и затем прибавляя к обеим частям углы BAD и BCD, получаем требуемое, так как суммы углов треугольников ABD и DBC равны 180°.

15.18. Предположим, что указанным свойством обладают вершины A и B тетраэдра $ABCD$. Тогда $\angle CAB+\angle DAB>180^\circ$ и $\angle CBA+\angle DBA>180^\circ$. С другой стороны, $\angle CAB+\angle CBA=180^\circ-\angle ACB<180^\circ$ и $\angle DBA+\angle DAB<180^\circ$. Получено противоречие.

15.19. Согласно задаче 6.5 имеем $\angle ASB<\angle ASO+\angle BSO$. А так как луч SO лежит внутри трёхгранного угла $SABC$, $\angle ASO+\angle BSO<\angle ASC+\angle BSC$ (см. задачу 6.8). Записывая ещё две пары таких неравенств и складывая их, получаем требуемое.

15.20. а) Пусть α, β и γ — углы между рёбрами SA, SB и SC и плоскостями противолежащих им граней. Так как угол между прямой l и плоскостью Π не превосходит угла между прямой l и любой прямой плоскости Π, то $\alpha\leqslant\angle ASB$, $\beta\leqslant\angle BSC$ и $\gamma\leqslant\angle CSA$.

б) Двугранные углы трёхгранного угла $SABC$ острые, поэтому проекция SA_1 луча SA на плоскость SAC лежит внутри угла BSC. Из неравенств $\angle ASB\leqslant\leqslant\angle BSA_1+\angle ASA_1$ и $\angle ASC\leqslant\angle ASA_1+\angle CSA_1$ следует, что $\angle ASB+\angle ASC-\angle BSC\leqslant\leqslant 2\angle ASA_1$. Записав аналогичные неравенства для рёбер SB и SC и сложив их, получим требуемое.

15.21. Докажем сначала требуемое утверждение в случае, когда точка A' лежит на ребре AB. Ясно, что $\angle BA'C=\angle BAC+\angle ACA'$ и $\angle BA'D=\angle BAD+\angle ADA'$. Поэтому требуемое неравенство можно преобразовать к виду $\angle ACA'+\angle CA'D+\angle ADA'>\angle CAD$. Учитывая, что $\angle CA'D=180^\circ-\angle A'CD-\angle A'DC$ и $\angle CAD=180^\circ-\angle ACD-\angle ADC$, переходим к неравенству

$$\angle ACA'+\angle ACD+\angle ADC+\angle ADA'>\angle A'CD+\angle A'DC.$$

Это неравенство следует из неравенств для трёхгранных углов $\angle ACA'+\angle ACD>>\angle A'CD$ и $\angle ADC+\angle ADA'>\angle A'DC$ (см. задачу 6.5).

Теперь требуемое неравенство легко доказывается и в общем случае. Для этого сначала рассмотрим точку A_1, в которой плоскость $A'CD$ пересекает ребро AB. Затем рассмотрим точку A_2, в которой прямая CA' пересекает отрезок A_1D. Применив последовательно доказанное неравенство к точкам A_1, A_2 и A', получим требуемое.

15.22. Пусть O — центр прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Высота OH равнобедренного треугольника AOC параллельна ребру AA_1, поэтому $\angle AOC=2\alpha$, где α — угол между ребром AA_1 и диагональю AC_1. Аналогичные рассуждения показывают, что плоские углы трёхгранного угла $OACD_1$ равны 2α, 2β и 2γ. Следовательно, $2\alpha+2\beta+2\gamma<2\pi$.

15.23. Пусть S — вершина данного угла. Из решения задачи 6.21 (б) следует, что его можно так пересечь плоскостью, что в сечении получится ромб $ABCD$, причём $SA=SC$ и $SB=SD$, а проекция вершины S на плоскость сечения совпадает с точкой O пересечения диагоналей ромба. Угол ASC будет острым, если $AO<SO$, и тупым, если $AO>SO$. Так как $\angle ASB=60^\circ$, то $AB^2=AS^2+BS^2-AS\cdot BS$. Выразив по теореме Пифагора AB, AS и BS через AO, BO и SO, после приведения подобных слагаемых и возведения в квадрат получим $(1+a^2)(1+b^2)=4$, где $a=\frac{AO}{SO}$ и $b=\frac{BO}{SO}$. Следовательно, как неравенства $a>1$ и $b>1$, так и неравенства $a<1$ и $b<1$ не могут выполняться одновременно.

15.24. Пусть O — точка внутри тетраэдра $ABCD$; α, β и γ — углы, под которыми видны из неё рёбра AD, BD и CD; a, b и c — углы, под которыми видны рёбра BC, CA и AB; P — точка пересечения прямой DO с гранью ABC. Так как луч OP лежит внутри трёхгранного угла $OABC$, то $\angle AOP+\angle BOP<\angle AOC+\angle BOC$ (см. задачу 6.8), т. е. $\pi-\alpha+\pi-\beta<b+a$, а значит, $\alpha+\beta+a+b>2\pi$. Аналогично $\beta+\gamma+b+c>2\pi$ и $\alpha+\gamma+a+c>2\pi$. Складывая эти неравенства, получаем требуемое.

15.25. а) Применим утверждение задачи 11.30 к тетраэдру $ABCD$. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ — векторы, соответствующие граням BCD, ACD, ABD и ABC. Сумма этих векторов равна нулю, поэтому существует пространственный четырёхугольник, векторами последовательных сторон которого являются $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Угол между сторонами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ этого четырёхугольника равен двугранному углу при ребре CD (см. рис. 15.3). Аналогичные рассуждения показывают, что рассматриваемая сумма двугранных углов равна сумме плоских углов полученного четырёхугольника, которая меньше 2π (задача 15.17).

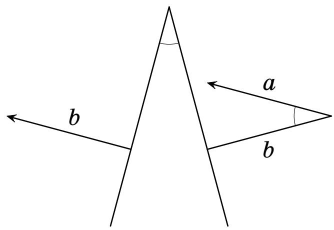


Рис. 15.3

б) Запишем полученное в задаче (а) неравенство для каждой пары противоположных рёбер тетраэдра и сложим эти три неравенства. Каждый двугранный угол тетраэдра входит в два таких неравенства, поэтому удвоенная сумма двугранных углов тетраэдра меньше 6π.

Сумма двугранных углов любого трёхгранного угла больше π (задача 6.6). Запишем такое неравенство для каждой из четырёх вершин тетраэдра и сложим эти неравенства. Каждый двугранный угол тетраэдра входит в два таких неравенства (соответствующих концам ребра), поэтому удвоенная сумма двугранных углов тетраэдра больше 4π.

15.26. Из задачи 7.30 (б) следует, что сумма величин телесных углов трёхгранных углов тетраэдра равна $2x-4\pi$, где x — сумма его двугранных углов. Согласно задаче 15.25 (б) $x<3\pi$, поэтому $2x-4\pi<2\pi$.

15.27. Достроим прямоугольный треугольник ACB до прямоугольника $ACBE$. Интересующий нас угол между прямыми AC и BD равен углу EBD. Диагонали прямоугольника равны, поэтому $AB=CE$ и $\frac{CD}{AB}=\frac{CD}{CE}$.

Рассмотрим сферу с диаметром AB. Отрезок CE тоже является диаметром этой сферы, а точка D лежит на ней. Поэтому угол CDE прямой и $\frac{CD}{CE}=\cos DCE$. Таким образом, требуется доказать неравенство $|\cos DBE|<\cos DCE$.

Пусть R — радиус сферы с диаметром AB, а r — радиус сечения этой сферы плоскостью BDE. Плоскость BDE не проходит через центр рассматриваемой сферы, поэтому $r<R$. Тогда из равенств $2r\sin DBE=DE=2R\sin DCE$ следует неравенство $\sin DBE>\sin DCE$. Поэтому $|\cos DBE|<|\cos DCE|=\cos DCE$.

15.28. Вершины всех конусов можно заключить в шар радиуса r. Рассмотрим сферу радиуса R с тем же центром O. Если $\frac{R}{r}$ стремится к бесконечности, то доля поверхности этой сферы, заключённой внутри данных конусов, стремится к доли её поверхности, заключённой внутри конусов с теми же углами раствора, вершинами в точке O и осями, параллельными осям данных конусов. Так как телесный угол конуса с углом раствора φ равен $4\pi\sin^2\frac{\varphi}{4}$ (задача 7.31), то

$$4\pi\left(\sin^2\frac{\varphi_1}{4}+\ldots+\sin^2\frac{\varphi_n}{4}\right)\geqslant 4\pi.$$

Остаётся заметить, что $x\geqslant\sin x$.

15.29. Проекции на плоскость грани тетраэдра трёх остальных его граней полностью покрывают эту грань. Ясно также, что площадь проекции треугольника на плоскость, ему не параллельную, меньше площади самого треугольника (см. задачу 2.15).

15.30. Построим внешним образом на гранях внутреннего многогранника как на основаниях прямоугольные призмы, рёбра которых достаточно велики: все они должны пересекать поверхность внешнего многогранника. Эти призмы высекают на поверхности внешнего многогранника попарно непересекающиеся фигуры, площадь каждой из которых не меньше площади основания призмы, т. е. грани внутреннего многогранника. В самом деле, проекция каждой такой фигуры на плоскость основания призмы совпадает с самим основанием, а при проецировании площадь фигуры может только уменьшиться (задача 2.15).

15.31. Пусть плоскость Π параллельна двум скрещивающимся рёбрам тетраэдра. Докажем, что требуемые две плоскости можно найти даже среди плоскостей, перпендикулярных Π. Проекцией тетраэдра на любую такую плоскость является трапеция (или треугольник) с постоянной высотой, равной расстоянию между выбранными скрещивающимися рёбрами тетраэдра. Средняя линия этой трапеции является проекцией параллелограмма с вершинами в серединах четырёх рёбер тетраэдра. Таким образом, остаётся проверить, что для любого параллелограмма найдутся две такие прямые (в той же плоскости), что отношение длин проекций параллелограмма на них не меньше $\sqrt{2}$. Пусть a и b — длины сторон параллелограмма, причём $a\leqslant b$; d — длина его наибольшей диагонали. Длина проекции параллелограмма на прямую, перпендикулярную стороне b, не превосходит a; длина проекции на прямую, параллельную диагонали d, равна d. Ясно также, что $d^2\geqslant a^2+b^2\geqslant 2a^2$.

15.32. а) Если треугольное сечение не проходит через вершину тетраэдра, то существует параллельное ему треугольное сечение, проходящее через вершину; площадь последнего сечения больше. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда сечение проходит через вершину или ребро тетраэдра.

Пусть точка M лежит на ребре CD тетраэдра $ABCD$. Длина высоты, опущенной из точки M на прямую AB, заключена между длинами высот, опу-

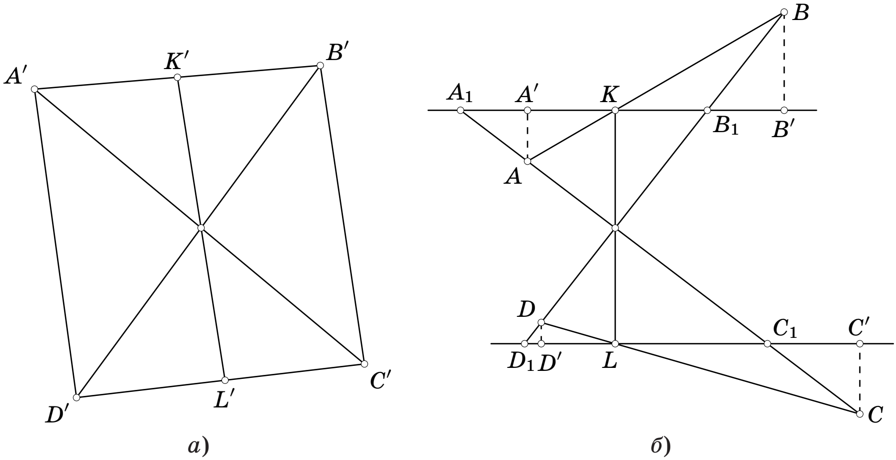


Рис. 15.4

щенных на эту прямую из точек C и D (задача 15.5). Поэтому $S_{ABM} \leqslant S_{ABC}$ или $S_{ABM} \leqslant S_{ABD}$.

Пусть точки M и N лежат на рёбрах CD и CB тетраэдра $ABCD$. К сечению AMN тетраэдра $AMBC$ можно применить только что доказанное утверждение. Поэтому $S_{AMN} \leqslant S_{ACM} \leqslant S_{ACD}$ или $S_{AMN} \leqslant S_{ABM}$.

б) Пусть плоскость пересекает рёбра AB, CD, BD и AC тетраэдра $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную прямой MN (рис. 15.4, *а*). Так как $K'L' = KL \sin\varphi$, где φ — угол между прямыми KL и MN, то площадь сечения тетраэдра равна $K'L' \cdot \frac{MN}{2}$. Поэтому достаточно доказать, что $K'L' \leqslant A'C'$ или $K'L' \leqslant B'D'$; действительно, тогда площадь рассматриваемого сечения не превосходит площади треугольного сечения MAC или NBD, и мы можем воспользоваться задачей (а).

Остаётся доказать следующее планиметрическое утверждение: «Длина отрезка KL, проходящего через точку пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$, не превосходит длины одной из его диагоналей (концы отрезка лежат на сторонах четырёхугольника)». Проведём через концы отрезка KL прямые, ему перпендикулярные, и рассмотрим проекции на них вершин четырёхугольника, а также точки пересечения с ними прямых AC и BD (рис. 15.4, *б*). Пусть для определённости точка A лежит внутри полосы, заданной этими прямыми, а точка B вне её. Тогда можно считать, что D лежит внутри полосы, так как иначе $BD > KL$ и доказательство завершено. Так как

$$\frac{AA'}{BB'} \leqslant \frac{A_1K}{B_1K} = \frac{C_1L}{D_1L} \leqslant \frac{CC'}{DD'},$$

то либо $AA' \leqslant CC'$ (и тогда $AC > KL$), либо $BB' \geqslant DD'$ (и тогда $BD > KL$).

З а м е ч а н и е. Ср. с задачей 15.16.

15.33. Пусть данная плоскость пересекает рёбра AB, AD и AA' в точках K, L и M; P, Q и R — центры граней $ABB'A'$, $ABCD$ и $ADD'A'$; O — точка касания плоскости со сферой. Плоскости KOM и KPM касаются сферы в точках O и P, поэтому $\Delta KOM = \Delta KPM$, а значит, $\angle KOM = \angle KPM$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\angle KPM + \angle MRL + \angle LQK = \angle KOM + \angle MOL + \angle LOK = 360^\circ$. Ясно также, что $KP = KQ$, $LQ = LR$ и $MR = MP$, поэтому четырёхугольники $AKPM$, $AMRL$ и $ALQK$ можно сложить так, как показано на рис. 15.5. В шестиугольнике ALA_1MA_2K углы при вершинах A, A_1 и A_2 прямые, поэтому $\angle K + \angle L + \angle M = 4\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$, а так как углы K, L и M больше $\frac{\pi}{2}$, то два из них, например K и L, меньше π. Тогда точка A_2 лежит на дуге DC, A_1 — на дуге CB, а значит, точка M лежит внутри квадрата $ABCD$.

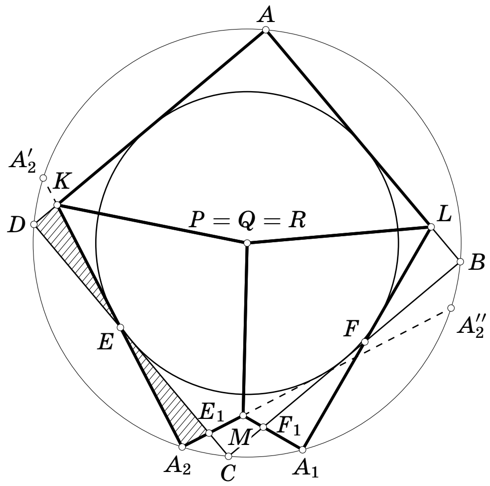


Рис. 15.5

При симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку DA_2 обе окружности переходят в себя, поэтому касательные прямые DA и DC переходят в A_2A_2'' и A_2A_2', а значит, $\Delta DKE = \Delta A_2E_1E$. Аналогично $\Delta BLF = \Delta A_1F_1F$. Следовательно, площадь шестиугольника ALA_1MA_2K, равная площади поверхности данной пирамиды, меньше площади квадрата $ABCD$.

15.34. Если два тетраэдра имеют общий трёхгранный угол, то отношение их объёмов равно произведению отношений длин рёбер, лежащих на рёбрах этого трёхгранного угла (см. задачу 3.1). Поэтому произведение отношений объёмов рассматриваемых четырёх тетраэдров к объёму исходного равно произведению чисел вида $A_iB_{ij} : A_iA_j$, где A_i и A_j — вершины тетраэдра, B_{ij} — отмеченная точка на ребре A_iA_j. Каждому ребру A_iA_j соответствует пара таких чисел $A_iB_{ij} : A_iA_j$ и $A_iB_{ij} : A_iA_j$. Если $A_iA_j = a$ и $A_iB_{ij} = x$, то $A_jB_{ij} = a - x$. Поэтому произведение пары чисел, соответствующих ребру A_iA_j, равно $\frac{x(a-x)}{a^2} \leqslant \frac{1}{4}$.

Так как у тетраэдра шесть рёбер, рассматриваемое произведение четырёх отношений объёмов тетраэдров не превосходит $\frac{1}{4^6}=\frac{1}{8^4}$. Поэтому одно из отношений объёмов не превосходит $\frac{1}{8}$.

15.35. Пусть длины всех рёбер тетраэдра $ABCD$, кроме ребра CD, не превосходят 1. Если h_1 и h_2 — высоты, опущенные из вершин C и D на прямую AB, и $a=AB$, то объём V тетраэдра $ABCD$ равен $\frac{ah_1h_2\sin\varphi}{6}$, где φ — двугранный угол при ребре AB. В треугольнике со сторонами a, b и c квадрат высоты, опущенной на a, равен

$$\frac{b^2-x^2+c^2-(a-x)^2}{2}\leqslant\frac{b^2+c^2-\frac{a^2}{2}}{2}.$$

В нашем случае $h^2\leqslant 1-\frac{a^2}{4}$, поэтому $V\leqslant\frac{a(1-a^2/4)}{6}$, причём $0<a\leqslant 1$. Вычисляя производную функции $a\left(1-\frac{a^2}{4}\right)$, получаем, что она монотонно возрастает на интервале от 0 до $\sqrt{\frac{4}{3}}$, а значит, и на интервале от 0 до 1, При $a=1$ величина $\frac{a(1-a^2/4)}{6}$ равна $\frac{1}{8}$.

15.36. а) Пусть O — центр данной сферы. Разобьём данный многогранник на пирамиды с вершиной O, основаниями которых служат его грани. Высоты этих пирамид не меньше r, поэтому сумма их объёмов не меньше $\frac{Sr}{3}$, а значит, $V\geqslant\frac{Sr}{3}$.

б) Построим на гранях данного многогранника как на основаниях внутренним образом прямоугольные призмы высотой $h=\frac{V}{S}$. Эти призмы могут пересекаться и вылезать за пределы многогранника, а сумма их объёмов равна $hS=V$, поэтому останется точка многогранника, ими не покрытая. Сфера радиуса $\frac{V}{S}$ с центром в этой точке не пересекает граней данного многогранника.

в) Согласно задаче (б) во внутренний многогранник можно поместить сферу радиуса $r=\frac{V_2}{S_2}$. А так как эта сфера лежит внутри внешнего многогранника, то согласно задаче (а) $\frac{V_1}{S_1}\geqslant\frac{r}{3}$.

15.37. На каждом ребре куба есть точка многогранника, так как иначе его проекция вдоль этого ребра не совпадала бы с гранью. Возьмём на каждом ребре куба по одной точке многогранника и рассмотрим новый выпуклый многогранник с вершинами в этих точках. Так как он содержится в исходном многограннике, достаточно доказать, что его объём не меньше $\frac{1}{3}$ объёма куба.

Можно считать, что длина ребра куба равна 1. Рассматриваемый многогранник получается путём отрезания тетраэдров от трёхгранных углов при вершинах куба. Докажем, что сумма объёмов двух тетраэдров для вершин, принадлежащих одному ребру куба, не превосходит $\frac{1}{6}$. Эта сумма равна $\frac{1}{3}S_1h_1+\frac{1}{3}S_2h_2$, где h_1 и h_2 — высоты, опущенные на противоположные грани куба из вершины многогранника, лежащей на данном ребре куба, а S_1 и S_2 — площади соответствующих граней тетраэдров. Остаётся заметить, что $S_1\leqslant\frac{1}{2}$, $S_2\leqslant\frac{1}{2}$ и $h_1+h_2=1$.

Четыре параллельных ребра куба задают разбиение его вершин на 4 пары. Поэтому объём всех отрезанных тетраэдров не превосходит $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, т. е. объём оставшейся части не меньше $\frac{1}{3}$.

Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб, то многогранниками, для которых достигается равенство, являются тетраэдры AB_1CD_1 и A_1BC_1D.

15.38. Проведём плоскости, параллельные координатным плоскостям и удалённые от них на расстояние $n\varepsilon$, где n пробегает множество целых чисел, ε — некоторое фиксированное число. Они разбивают пространство на кубики с ребром ε. Доказательство достаточно провести для тел, состоящих из этих кубиков. В самом деле, если перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$, то объём и площади проекций тела, состоящего из лежащих внутри исходного тела кубиков, будут стремиться к объёму и площадям проекций исходного тела.

Докажем сначала, что если тело разрезано на две части плоскостью, параллельной координатной плоскости, причём для обеих частей справедливо указанное неравенство, то оно справедливо и для всего тела. Пусть V — объём всего тела, S_1, S_2 и S_3 — площади его проекций на координатные плоскости; объём и площади для первой и второй его частей будем обозначать одним и соответственно двумя штрихами. Нужно доказать, что из неравенств $V'\leqslant\sqrt{S_1'S_2'S_3'}$ и $V''\leqslant\sqrt{S_1''S_2''S_3''}$ следует неравенство $V=V'+V''\leqslant\sqrt{S_1S_2S_3}$. Так как $S_3'\leqslant S_3$ и $S_3''\leqslant S_3$, достаточно проверить неравенство $\sqrt{S_1'S_2'}+\sqrt{S_1''S_2''}\leqslant\sqrt{S_1S_2}$. Можно считать, что S_3 — площадь проекции на плоскость, разрезающую тело. Тогда $S_1=S_1'+S_1''$ и $S_2=S_2'+S_2''$. Остаётся проверить неравенство $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\leqslant$ $\leqslant\sqrt{(a+c)(b+d)}$. Для его доказательства нужно обе части возвести в квадрат и воспользоваться неравенством

$$\sqrt{(ad)(bc)}\leqslant\frac{1}{2}(ad+bc).$$

Доказательство требуемого неравенства будем проводить индукцией по высоте тела, т. е. по числу слоёв кубиков, из которых оно состоит. Предыдущим рассуждением фактически доказан шаг индукции. Но пока ещё не доказана база индукции — не разобран случай тела, состоящего из одного слоя кубиков. В этом случае доказательство снова проведём по индукции с помощью доказанного выше утверждения: будем разрезать тело на прямоугольные параллелепипеды размером $\varepsilon\times\varepsilon\times n\varepsilon$. Справедливость требуемого неравенства для одного такого параллелепипеда, т. е. база индукции, легко проверяется.

15.39. Рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью, параллельной грани ABC и проходящей через центр его вписанной сферы. Это сечение является треугольником $A_1B_1C_1$, подобным треугольнику ABC, причём коэффициент подобия меньше 1. Треугольник $A_1B_1C_1$ содержит окружность радиуса r, где r — радиус вписанной сферы тетраэдра. Проводя к этой окружности касательные, параллельные сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, получим ещё меньший треугольник, описанный около окружности радиуса r.

15.40. Согласно задаче 11.22 имеем

$$OM = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC},$$

где $p = S_{MBC} : S_{ABC}$, $q = S_{MAC} : S_{ABC}$ и $r = S_{MAB} : S_{ABC}$. Остаётся заметить, что $OM \leqslant pOA + qOB + rOC$.

15.41. Пусть $2a$ — сторона основания пирамиды, h — её высота. Тогда r — радиус вписанной окружности равнобедренного треугольника с высотой h и основанием $2a$; R — радиус описанной окружности равнобедренного треугольника с высотой h и основанием $2\sqrt{2}a$. Поэтому $r(a + \sqrt{a^2 + h^2}) = ah$, т. е. $rh = a(\sqrt{a^2 + h^2} - a)$. Если b — боковая сторона равнобедренного треугольника, то $2R : b = b : h$, т. е. $2Rh = b^2 = 2a^2 + h^2$. Следовательно,

$$k = \frac{R}{r} = \frac{2a^2 + h^2}{2a(\sqrt{a^2 + h^2} - a)},$$

т. е. $(2a^2k + 2a^2 + h^2)^2 = 4a^2k^2(a^2 + h^2)$. Пусть $x = \dfrac{h^2}{a^2}$. Тогда

$$x^2 + 4x(1 + k - k^2) + 4 + 8k = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения относительно x равен $16k^2(k^2 - 2k - 1)$. Так как $k > 0$ и это квадратное уравнение имеет корни, то $k \geqslant 1 + \sqrt{2}$.

15.42. а) Ответ: да, верно. Пусть O — центр симметрии данного многогранника; M_2' — многоугольник, симметричный M_2 относительно точки O. Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник P, содержащий M_2 и M_2'. Докажем, что площадь части сечения M_1, лежащей внутри P, не меньше площади сечения M_2. Пусть A — внутренняя точка некоторой грани N многогранника P, отличной от M_2 и M_2', а точка B симметрична A относительно O. Плоскость, параллельная N, пересекает грани M_2 и M_2', тогда и только тогда, когда она пересекает отрезок AB; при этом она пересекает и M_1. Пусть плоскость, проходящая через точку отрезка AB параллельно грани N, пересекает грани M_2 и M_2' по отрезкам длиной l и l', а часть грани M_1, лежащую внутри P, — по отрезку длиной m. Тогда $m \geqslant \dfrac{l + l'}{2}$, так как многогранник P выпуклый. Следовательно, площадь сечения M_1 не меньше полусуммы площадей сечений M_2 и M_2', т. е. не меньше площади сечения M_2.

б) Ответ: нет, неверно. Рассмотрим правильный октаэдр с ребром a. Радиус описанной окружности грани равен $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Сечение, параллельное грани и проходящее через центр октаэдра, является правильным шестиугольником со стороной $\dfrac{a}{2}$; радиус его описанной окружности равен $\dfrac{a}{2}$. Ясно, что $\dfrac{a}{\sqrt{3}} > \dfrac{a}{2}$.

15.43. Рассмотрим тело, состоящее из точек, удалённых от данного многогранника на расстояние не больше d. Площадь поверхности этого тела равна

$S + d\sum l_i(\pi - \varphi_i) + 4\pi d^2$, где S — площадь поверхности многогранника (задача 3.14). Так как это тело заключено внутри сферы радиуса $d + R$, то площадь его поверхности не превосходит $4\pi(d + R)^2$ (это утверждение получается предельным переходом из утверждения задачи 15.30). Следовательно, $S + d\sum l_i(\pi - \varphi_i) \leqslant 8\pi dR + 4\pi R^2$. Переходя к пределу при $d \to \infty$, получим требуемое.

ГЛАВА 16

ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

§ 1. Отрезок с концами на скрещивающихся прямых

16.1. Концы отрезка AB перемещаются по данным прямым a и b. Докажите, что его длина будет наименьшей, когда он перпендикулярен обеим прямым.

16.2. Найдите наименьшую площадь сечения куба с ребром a плоскостью, проходящей через его диагональ.

16.3. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Точки M и N лежат на прямых BC_1 и CA_1, причём прямая MN параллельна плоскости AA_1B. Чему равна наименьшая длина такого отрезка MN?

16.4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Концы отрезка, пересекающего ребро C_1D_1, лежат на прямых AA_1 и BC. Какую наименьшую длину может иметь этот отрезок?

16.5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Концы отрезка, образующего угол 60° с плоскостью грани $ABCD$, лежат на прямых AB_1 и BC_1. Какую наименьшую длину может иметь этот отрезок?

§ 2. Площадь и объём

16.6. Докажите, что среди всех правильных n-угольных пирамид с фиксированной площадью полной поверхности наибольший объём имеет пирамида, у которой двугранный угол при ребре основания равен двугранному углу при ребре правильного тетраэдра.

16.7. Через точку M, лежащую внутри данного трёхгранного угла с прямыми плоскими углами, проводятся всевозможные плоскости. Докажите, что объём тетраэдра, отсекаемого такой плоскостью от трёхгранного угла, будет наименьшим, когда M — точка пересечения медиан треугольника, являющегося сечением трёхгранного угла этой плоскостью.

* * *

16.8. Какую наибольшую площадь может иметь ортогональная проекция правильного тетраэдра с ребром a на плоскость?

16.9. Чему равна наибольшая площадь проекции прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a, b и c на плоскость?

16.10. На плоскости лежит куб с ребром a. Источник света расположен на расстоянии b от плоскости, причём $b > a$. Найдите наименьшее значение площади тени, отбрасываемой кубом на плоскость.

§ 3. Расстояния и радиусы

16.11. а) Рассмотрим для каждой внутренней точки правильного тетраэдра сумму расстояний от неё до его вершин. Докажите, что эта сумма будет наименьшей для центра тетраэдра.

б) Два противоположных ребра тетраэдра равны b и c, а остальные рёбра равны a. Чему равно наименьшее значение суммы расстояний от произвольной точки пространства до вершин этого тетраэдра?

16.12. В усечённом конусе угол между осью и образующей равен $30°$. Докажите, что кратчайший путь по поверхности конуса, соединяющий точку границы одного основания с диаметрально противоположной точкой границы другого основания, имеет длину $2R$, где R — радиус большего основания.

16.13. Длины трёх попарно перпендикулярных отрезков OA, OB и OC равны a, b и c, причём $a \leqslant b \leqslant c$. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать сумма расстояний от точек A, B и C до прямой l, проходящей через точку O?

16.14. Поместите в куб окружность наибольшего возможного радиуса.

См. также задачи 8.82, 12.2.

§ 4. Разные задачи

16.15. Высота правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в два раза меньше стороны основания. Найдите наибольшее значение угла A_1MC_1, где M — точка ребра AB.

16.16. На поверхности куба найдите точки, из которых диагональ видна под наименьшим углом.

16.17. Три одинаковые цилиндрические поверхности радиуса R со взаимно перпендикулярными осями попарно касаются друг друга.

а) Чему равен радиус наименьшего шара, касающихся этих цилиндров?

б) Чему равен радиус наибольшего цилиндра, касающегося трёх данных, ось которого проходит внутри треугольника с вершинами в точках касания трёх данных цилиндров?

См. также задачу 1.8.

Решения

16.1. Проведём через прямую b плоскость Π, параллельную a. Пусть A' — проекция точки A на плоскость Π. Тогда $AB^2 = A'B^2 + A'A^2 = A'B^2 + h^2$, где h — расстояние между прямой a и плоскостью Π. Точка A' совпадает с B, если $AB \perp \Pi$.

16.2. Пусть плоскость проходит через диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и пересекает его рёбра BB_1 и DD_1 в точках P и Q соответственно. Площадь параллелограмма APC_1Q равна произведению длины отрезка AC_1 на расстояние от точки P до прямой AC_1. Расстояние от точки P до прямой AC_1 минимально, когда P лежит на общем перпендикуляре к прямым AC_1 и BB_1; этим общим перпендикуляром является прямая, проходящая через середины рёбер BB_1 и DD_1. Итак, площадь сечения будет наименьшей, когда P и Q — середины рёбер BB_1 и DD_1. Это сечение является ромбом с диагоналями $AC_1 = a\sqrt{3}$ и $PQ = a\sqrt{2}$; его площадь равна $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

16.3. Если M' и N' — проекции точек M и N на плоскость ABC, то $M'N' \parallel AB$. Пусть $CM' = x$. Тогда $M'N' = x$, а длина проекции отрезка MN на прямую CC_1 равна $|a - 2x|$. Следовательно,

$$MN^2 = x^2 + (a-2x)^2 = 5x^2 - 4ax + a^2.$$

Наименьшая длина отрезка MN равна $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

16.4. Ответ: $3a$. Пусть точки M и N лежат на прямых AA_1 и BC соответственно и отрезок MN пересекает ребро C_1D_1 в точке L. Тогда точки M и N лежат на лучах AA_1 и BC, причём $x = AM > a$ и $y = BN > a$. Рассматривая проекции на плоскости AA_1B и ABC, получаем соответственно $C_1L : LD_1 = a : (x-a)$ и $C_1L : LD_1 = (y-a) : a$. Поэтому $(x-a)(y-a) = a^2$, т. е. $xy = (x+y)a$, а значит, $(xy)^2 = (x+y)^2a^2 \geqslant 4xya^2$, т. е. $xy \geqslant 4a^2$. Следовательно,

$$MN^2 = x^2 + y^2 + a^2 = (x+y)^2 - 2xy + a^2 = \frac{(xy)^2}{a^2} - 2xy + a^2 = \frac{(xy-a^2)^2}{a^2} \geqslant 9a^2.$$

Наименьшее значение длины отрезка MN равно $3a$; оно достигается, когда $AM = BN = 2a$.

16.5. Ответ: $2a(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Введём систему координат, направив оси Ox, Oy и Oz по лучам BC, BA и BB_1 соответственно. Пусть точка M прямой BC_1 имеет координаты $(x, 0, x)$, а точка N прямой B_1A имеет координаты

$(0, y, a-y)$. Тогда квадрат длины отрезка MN равен $x^2+y^2+(a-x-y)^2$, а квадрат длины его проекции M_1N_1 на плоскость грани $ABCD$ равен x^2+y^2. Так как угол между прямыми MN и M_1N_1 равен 60°, то $MN=2M_1N_1$, т. е. $(a-x-y)^2=3(x^2+y^2)$.

Пусть $u^2=x^2+y^2$ и $v=x+y$. Тогда $MN=2M_1N_1=2u$. Кроме того, $(a-v)^2=3u^2$ по условию и $2u^2\geqslant v^2$. Следовательно, $(a-v)^2\geqslant\dfrac{3v^2}{2}$, а значит, $v\leqslant a(\sqrt{6}-2)$. Поэтому

$$u^2=\frac{(a-v)^2}{3}\geqslant\frac{a^2(3-\sqrt{6})^2}{3}=a^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2,$$

т. е. $MN\geqslant 2a(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Равенство достигается, когда $x=y=\dfrac{a(\sqrt{6}-2)}{2}$.

16.6. Пусть h — высота правильной пирамиды, r — радиус вписанной окружности её основания. Тогда объём и площадь полной поверхности пирамиды равны

$$\frac{n}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}(r^2h)\quad\text{и}\quad n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}(r^2+r\sqrt{h^2+r^2})$$

соответственно. Итак, фиксирована величина $r^2+r\sqrt{h^2+r^2}=a$, и нужно выяснить, когда максимальна величина r^2h (уже видно, что ответ не зависит от n). Так как

$$h^2+r^2=\left(\frac{a}{r}-r\right)^2=\left(\frac{a}{r}\right)^2-2a+r^2,$$

то $h^2=\left(\dfrac{a}{r}\right)^2-2a$, а значит, $(r^2h)^2=a^2r^2-2ar^4$. Производная этой функции по r равна $2a^2r-8ar^3$. Поэтому объём пирамиды максимален, если $r^2=\dfrac{a}{4}$, а значит, $h^2=2a$. Следовательно, если φ — двугранный угол при ребре основания этой пирамиды, то $\operatorname{tg}^2\varphi=\dfrac{h^2}{r^2}=8$, т. е. $\cos\varphi=\dfrac{1}{3}$.

16.7. Введём систему координат, направив её оси по рёбрам данного трёхгранного угла. Пусть точка M имеет координаты (α,β,γ); плоскость пересекает рёбра трёхгранного угла в точках, удалённых от его вершины на расстояния a, b и c. Тогда эта плоскость задаётся уравнением $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Так как она проходит через точку M, то $\dfrac{\alpha}{a}+\dfrac{\beta}{b}+\dfrac{\gamma}{c}=1$. Объём отсечённого тетраэдра равен $\dfrac{abc}{6}$. Произведение abc будет наименьшим, когда величина $\dfrac{\alpha\beta\gamma}{abc}$ будет наибольшей, т. е. когда $\dfrac{\alpha}{a}=\dfrac{\beta}{b}=\dfrac{\gamma}{c}=\dfrac{1}{3}$.

16.8. Ответ: $\dfrac{a^2}{2}$. Проекция тетраэдра может быть треугольником или четырёхугольником. В первом случае она является проекцией одной из граней, поэтому ее площадь не превосходит $\sqrt{3}\dfrac{a^2}{4}$. Во втором случае диагонали четырёхугольника являются проекциями рёбер тетраэдра, поэтому площадь ортогональной проекции, равная половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними, не превосходит $\frac{a^2}{2}$; равенство достигается, когда пара противоположных рёбер тетраэдра параллельна данной плоскости. Остаётся заметить, что $\frac{\sqrt{3}a^2}{4} < \frac{a^2}{2}$.

16.9. О т в е т: $\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$. Площадь проекции параллелепипеда вдвое больше площади проекции одного из треугольников с вершинами в концах трёх рёбер параллелепипеда, выходящих из одной вершины; например, если проекцией параллелепипеда является шестиугольник, то в качестве такой вершины нужно взять вершину, проекция которой лежит внутри шестиугольника. Для прямоугольного параллелепипеда все такие треугольники равны. Поэтому площадь проекции параллелепипеда будет наибольшей, когда один из этих треугольников параллелен плоскости проекции. Она будет равна $\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ (см. задачу 8.20).

16.10. О т в е т: $\left(\frac{ab}{a-b}\right)^2$. Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной a; точка X удалена от прямой AB на расстояние b, причём точки X и C лежат по одну сторону от этой прямой; C' и D' — точки пересечения продолжений отрезков XC и XD за точки C и D с прямой AB. Так как $\Delta C'D'X \sim \Delta CDX$, то $x : a = b : (b-a)$, где $x = C'D'$. Поэтому $x = \frac{ab}{b-a}$. Эти рассуждения показывают, что тень, отбрасываемая верхней гранью куба, всегда представляет собой квадрат со стороной $\frac{ab}{b-a}$. Следовательно, площадь тени, отбрасываемой кубом, будет наименьшей, когда эта тень совпадает с тенью, отбрасываемой одной лишь верхней гранью, т. е. когда источник света расположен над верхней гранью. При этом площадь тени равна $\left(\frac{ab}{a-b}\right)^2$; нижняя грань куба считается входящей в тень.

16.11. а) Проведём через вершины правильного тетраэдра $ABCD$ плоскости, параллельные противоположным граням. Эти плоскости также образуют правильный тетраэдр. Поэтому сумма расстояний от них до внутренней точки X тетраэдра $ABCD$ постоянна (задача 3.24). Расстояние от точки X до такой плоскости не превосходит расстояния от точки X до соответствующей вершины тетраэдра, причём сумма расстояний от точки X до вершин тетраэдра равна сумме расстояний от точки X до этих плоскостей, только если X — центр тетраэдра.

б) О т в е т: $\sqrt{4a^2+2bc}$. Пусть в тетраэдре $ABCD$ рёбра AB и CD равны b и c, а остальные рёбра равны a. Если M и N — середины рёбер AB и CD, то прямая MN является осью симметрии тетраэдра $ABCD$ (задача 12.8). Пусть X — произвольная точка пространства; точка Y симметрична ей относительно прямой MN; K — середина отрезка XY (она лежит на прямой MN). Тогда $XA+XB=XA+YA \geqslant 2KA=KA+KB$. Аналогично $XC+XD \geqslant KC+KD$. Поэтому достаточно выяснить, чему равно наименьшее значение суммы расстояний до вершин тетраэдра для точек прямой MN. Для точек этой прямой сумма расстояний до вершин тетраэдра $ABCD$ не изменится, если отрезок AB повернуть относительно неё так, чтобы он стал параллелен CD. При этом получим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями b и c и высотой $MN=\sqrt{a^2-\dfrac{b^2+c^2}{4}}$. Для любого выпуклого четырёхугольника сумма расстояний до вершин достигает наименьшего значения в точке пересечения диагоналей; при этом она равна сумме длин диагоналей. Легко проверить, что сумма длин диагоналей полученной трапеции $ABCD$ равна $\sqrt{4a^2+2bc}$.

16.12. Докажем, что кратчайший путь, идущий из точки A границы большего основания в диаметрально противоположную точку C другого основания, состоит из образующей AB и диаметра BC; длина этого пути равна $2R$. Пусть r — радиус меньшего основания, O — его центр. Рассмотрим путь, идущий из A в некоторую точку меньшего основания. Так как развёртка боковой поверхности конуса с углом α между осью и образующей представляет собой сектор окружности радиуса R, имеющий длину дуги $2\pi R\sin\alpha$, то развёртка боковой поверхности данного усечённого конуса с углом $\alpha=30^\circ$ представляет собой полукольцо с внешним радиусом $2R$ и внутренним радиусом $2r$. Кроме того, если $\angle BOM=2\varphi$, то на развёртке $\angle BCM=\varphi$ (см. рис. 16.1). Длина любого пути из A в M не меньше длины отрезка на развёртке конуса. Следовательно, длина пути из A в C не меньше $AM+CM$, где

$$AM^2=AC^2+CM^2-2AM\cdot CM\cos ACM=4R^2+4r^2-8Rr\cos\varphi$$

(на развёртке) и $CM=2r\cos\varphi$ (на поверхности конуса). Остаётся проверить, что

$$\sqrt{4R^2+4r^2-8rR\cos\varphi}+2r\cos\varphi\geqslant 2R.$$

Так как $2R-2r\cos\varphi>0$, то, перенося $2r\cos\varphi$ в правую часть и возводя обе части нового неравенства в квадрат, легко получаем требуемое.

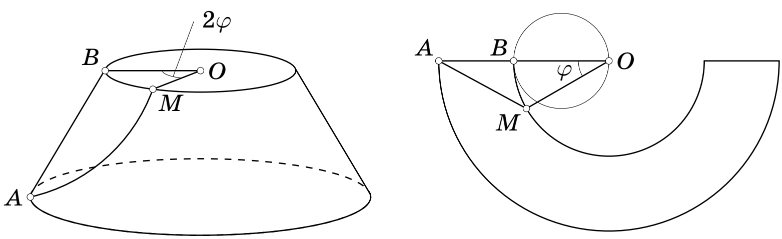


Рис. 16.1

16.13. Пусть углы между прямой l и прямыми OA, OB и OC равны α, β и γ. Тогда $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (задача 1.23), а значит, $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$. Сумма расстояний от точек A, B и C до прямой l равна $a\sin\alpha+b\sin\beta+c\sin\gamma$. Пусть $x=\sin\alpha$, $y=\sin\beta$, $z=\sin\gamma$. В задаче требуется найти наибольшее и наименьшее значение величины $ax + by + cz$ при следующих условиях: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Эти условия выделяют на поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ криволинейный треугольник (рис. 16.2).

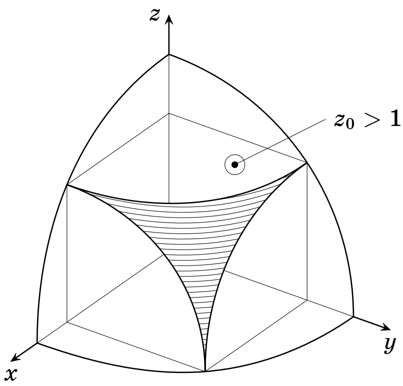


Рис. 16.2

Пусть плоскость $ax + by + cz = p_0$ касается поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ в точке M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0), причём $x_0, y_0, z_0 \geqslant 0$. Тогда $x_0 = \lambda a$, $y_0 = \lambda b$, $z_0 = \lambda c$ и $\lambda^2(a^2 + b^2 + c^2) = 2$, а

$$p_0 = \lambda(a^2 + b^2 + c^2) = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Если $z_0 \leqslant 1$ (т. е. $c^2 \leqslant a^2 + b^2$), то M_0 принадлежит выделенному криволинейному треугольнику, а значит, в этом случае p_0 — искомое наибольшее значение функции $ax + by + cz$. Пусть теперь $z_0 > 1$, т. е. $c^2 > a^2 + b^2$. Плоскость $ax + by + cz = p$, где $p < p_0$, пересекает рассматриваемую сферу по окружности. Нас интересуют те значения p, при которых эта окружность пересекается с выделенным криволинейным треугольником. Наибольшее из таких p соответствует значению $z_0' = 1$. Нахождение x_0' и y_0' сводится к следующей задаче: при каких x и y достигает наибольшего значения выражение $ax + by$, если $x^2 + y^2 = 1$. Легко проверить, что $x_0' = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $y_0' = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, т. е. в этом случае искомое наибольшее значение p равно $\sqrt{a^2 + b^2} + c$.

Докажем теперь, что наименьшее значение выражения $ax + by + cz$ на выделенном треугольнике достигается в вершине $x_1 = y_1 = 1$, $z_1 = 0$. В самом деле, так как $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$, то $x + y + z \geqslant x^2 + y^2 + z^2 = 2$, а значит, $y + z - 1 \geqslant 1 - x$. Обе части этого неравенства неотрицательны, поэтому $b(y + z - 1) \geqslant a(1 - x)$. Следовательно, $ax + by + cz \geqslant ax + by + bz \geqslant a + b$.

16.14. Пусть a — длина ребра куба. Сечение куба плоскостью, проходящей через его центр ортогонально одной из диагоналей, является правильным шестиугольником. Радиус вписанной окружности этого шестиугольника равен $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$, поэтому в куб можно поместить окружность радиуса $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Покажем, что окружность большего радиуса в куб поместить нельзя. Прежде всего заметим, что достаточно ограничиться рассмотрением окружностей с центром в центре куба. Действительно, если окружность радиуса R содержится в кубе, то окружность, симметричная ей относительно центра куба, тоже содержится в кубе. Но тогда из выпуклости куба следует, что окружность радиуса R, центр которой совпадает с центром куба, а сама она расположена в плоскости, параллельной плоскости исходной окружности, тоже содержится в кубе.

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в центре куба и шар того же радиуса и с тем же центром. Нас интересует лишь случай, когда $R > \dfrac{a}{2}$ и рассматриваемая окружность лежит внутри куба. В этом случае вне куба находятся шесть шаровых сегментов. Радиусы окружностей, лежащих в их основаниях, равны $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, поэтому r возрастает при возрастании R. Рассмотрим конусы, вершины которых находятся в центре куба, а основаниями служат окружности оснований шаровых сегментов. Если плоскость Π, содержащая рассматриваемую окружность, пересекает один из этих конусов, то часть окружности проходит по шаровому сегменту, а потому частично лежит вне куба. Таким образом, нужно доказать, что если $R > \frac{a\sqrt{6}}{4}$, то плоскость Π пересекает один из конусов. Плоскость Π разбивает лучи, выходящие из центра куба и направленные в середины граней, на две тройки (каждая тройка лежит по одну сторону от плоскости Π). Рассмотрим плоскость Π', которая проходит через центр куба перпендикулярно одной из диагоналей и разбивает эти лучи на те же самые две тройки. В плоскости Π' есть окружность радиуса $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, целиком лежащая внутри куба. Легко проверить, что плоскость Π' касается трёх конусов (соответствующих тройке лучей, которые являются осями этих конусов) по трём лучам OX, OY, OZ. Лучи OX, OY, OZ лежат строго внутри конусов, соответствующих окружности радиуса $R > \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Значит, эти лучи лежат по одну сторону от плоскости Π, поскольку оси соответствующих конусов лежат по одну сторону от этой плоскости. Плоскости Π и Π' имеют общую точку (центр куба), поэтому они пересекаются по некоторой прямой. Лучи OX, OY и OZ образуют друг с другом углы в 120°, поэтому никакая прямая не может разделить плоскость Π' так, чтобы эти лучи лежали в одной полуплоскости. Таким образом, плоскость Π' пересекает один из конусов, если $R > \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

16.15. Пусть $AA_1 = 1$, $AM = x$. Введём систему координат, оси которой параллельны рёбрам призмы. Векторы $\overrightarrow{MA_1}$ и $\overrightarrow{MC_1}$ имеют координаты $(0, 1, -x)$ и $(2, 1, 2-x)$; их скалярное произведение равно $1 - 2x + x^2 = (1-x)^2 \geqslant 0$. Поэтому $\angle A_1MC_1 \leqslant 90^\circ$; при $x = 1$ этот угол равен 90°.

16.16. Ответ: вершины куба, отличные от концов диагонали. Множество точек, из которых диагональ куба видна под углом 90°, представляет собой описанную сферу куба (концы диагонали исключены). Пересечение этого множества с поверхностью куба состоит из шести точек, отличных от концов данной диагонали. Все остальные точки поверхности куба лежат строго внутри описанной сферы, поэтому из них диагональ видна под тупым углом.

16.17. Существует параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, рёбра AA_1, DC и B_1C_1 которого лежат на осях данных цилиндров (задача 1.17); ясно, что этот параллелепипед является кубом с ребром $2R$.

а) Центр этого куба удалён от всех рёбер на расстояние $\sqrt{2}R$, а любая другая точка удалена на расстояние больше $\sqrt{2}R$ хотя бы от одной из прямых AA_1, DC, B_1C_1 (задача 1.33). Поэтому радиус наименьшего шара, касающегося всех трёх цилиндров, равен $(\sqrt{2}-1)R$.

б) Пусть K, L и M — середины рёбер AD, A_1B_1 и CC_1, т. е. точки попарного касания данных цилиндров. Тогда треугольник KLM правильный, причём его центр O совпадает с центром куба (задача 11.1). Пусть K', L' и M' — середины рёбер B_1C_1, DC и AA_1; эти точки симметричны точкам K', L' и M' относительно точки O. Докажем, что прямая l, проходящая через точку O перпендикулярно плоскости KLM, удалена от прямых B_1C_1, DC и AA_1 на расстояние $\sqrt{2}R$. В самом деле, $K'O \perp l$ и $K'O \perp B_1C_1$, поэтому расстояние между прямыми l и B_1C_1 равно $K'O = \sqrt{2}R$; для остальных прямых доказательство аналогично. Следовательно, радиус цилиндра с осью l, касающегося трёх данных цилиндров, равен $(\sqrt{2}-1)R$. Остаётся проверить, что расстояние от любой прямой l', пересекающей треугольник KLM, до одной из точек K', L, M' не превосходит $\sqrt{2}R$. Пусть, например, точка X пересечения прямой l' с плоскостью KLM лежит внутри треугольника KOL, Тогда $M'X \leqslant \sqrt{2}R$.

ГЛАВА 17

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

§ 1. Правило крайнего

Для решения многих задач бывает полезно рассмотреть какой-либо «крайний», «граничный» элемент, т. е. элемент, на котором некоторая величина принимает наибольшее или наименьшее значение, например наибольшее или наименьшее ребро, наибольший или наименьший угол и т. д. Этот метод решения задач иногда называют *правилом* (*принципом*) *крайнего*.

17.1. Докажите, что не существует тетраэдра, в котором каждое ребро было бы стороной тупого плоского угла.

17.2. Докажите, что в любом тетраэдре найдётся ребро, образующее острые углы с рёбрами, выходящими из его концов.

17.3. Докажите, что в любом тетраэдре найдётся трёхгранный угол, все плоские углы которого острые.

17.4. Докажите, что в любом тетраэдре найдутся три ребра, выходящих из одной вершины, из которых можно составить треугольник.

17.5. В основании пирамиды $A_1 \ldots A_nS$ лежит правильный n-угольник $A_1 \ldots A_n$. Докажите, что если $\angle SA_1A_2 = \angle SA_2A_3 = \ldots = \angle SA_nA_1$, то пирамида правильная.

17.6. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите все точки грани ABC, равноудалённые от прямых AB_1, BC_1 и CA_1.

17.7. На каждой из $2k+1$ планет сидит астроном, наблюдающий ближайшую планету (все расстояния между планетами различны). Докажите, что найдётся планета, которую никто не наблюдает.

17.8. В пространстве имеется несколько планет — шаров с единичными радиусами. Отметим на каждой планете множество всех точек, из которых не видна ни одна другая планета. Докажите, что сумма площадей отмеченных частей равна площади поверхности одной планеты.

17.9. Докажите, что куб нельзя разрезать на несколько попарно различных кубиков.

См. также задачи 12.22, 12.23, 19.42.

§ 2. Принцип Дирихле

Самая популярная формулировка *принципа Дирихле* такова: «Если в n клетках сидит m зайцев, причём $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят по крайней мере два зайца». Это простое соображение оказывается полезным при решении многих задач. Аналогичные утверждения справедливы не только для конечного числа объектов, но и для длин, площадей, объёмов. Например: «Если внутри тела объёма V расположено несколько тел, сумма объёмов которых больше V, то по крайней мере два тела имеют общую точку». Это утверждение легко доказывается методом от противного.

17.10. Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

17.11. У белой сферы 12% её площади окрашено в красный цвет. Докажите, что в сферу можно вписать параллелепипед, у которого все вершины белые.

17.12. В кубе, ребро которого равно 13, выбрано 1956 точек. Можно ли в этот куб поместить кубик с ребром 1 так, чтобы внутри его не было ни одной выбранной точки?

17.13. Шарообразная планета окружена 37 точечными астероидами. Докажите, что в любой момент на поверхности планеты найдётся точка, из которой астроном не сможет наблюдать более 17 астероидов. (Астероид, расположенный на линии горизонта, не виден.)

17.14. Внутри шара радиуса 3 расположено несколько шаров, сумма радиусов которых равна 25 (эти шары могут пересекаться). Докажите, что для любой плоскости найдётся плоскость, параллельная ей и пересекающая по крайней мере девять внутренних шаров.

17.15. Дан выпуклый многогранник P_1 с девятью вершинами A_1, $A_2, \ldots, A_9$. Пусть $P_2, P_3, \ldots, P_9$ — многогранники, полученные из него параллельными переносами на векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_9}$ соответственно. Докажите, что по крайней мере два из девяти многогранников P_1, $P_2, \ldots, P_9$ имеют общую внутреннюю точку.

17.16. Астрономический прожектор освещает октант (трёхгранный угол, у которого все плоские углы прямые). Прожектор помещён в центр куба. Можно ли его повернуть таким образом, чтобы он не освещал ни одной вершины куба?

17.17. Дан правильный тетраэдр с рёбрами единичной длины. Докажите следующие утверждения:

а) на поверхности тетраэдра можно выбрать 4 точки так, чтобы расстояние от любой точки поверхности до одной из этих четырёх точек не превосходило 0,5;

б) на поверхности тетраэдра нельзя выбрать три точки, обладающие этим свойством.

См. также задачу 19.18.

§ 3. Выход в пространство

При решении планиметрических задач иногда оказывает существенную помощь то соображение, что плоскость расположена в пространстве, а значит, можно использовать вспомогательные элементы, находящиеся вне исходной плоскости. Такой метод решения планиметрических задач называется *выходом в пространство*.

17.18. На плоскости заданы четыре прямые, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. По каждой прямой с постоянной скоростью идёт пешеход. Известно, что первый встречается со вторым, третьим и четвёртым, а второй встречается с третьим и четвёртым. Докажите, что третий пешеход встретится с четвёртым.

17.19. Три прямые пересекаются в точке O. На первой из них взяты точки A_1 и A_2, на второй — B_1 и B_2 на третьей — C_1 и C_2. Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2 лежат на одной прямой (предполагается, что эти прямые пересекаются, т. е. не параллельны).

17.20. Три окружности попарно пересекаются и расположены так, как показано на рис. 17.1. Докажите, что общие хорды пар этих окружностей пересекаются в одной точке.

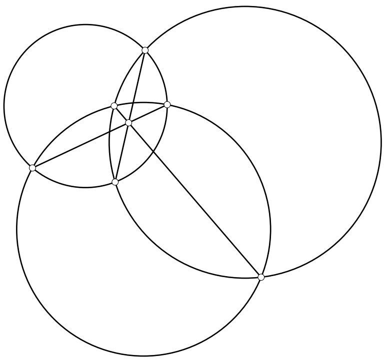


Рис. 17.1

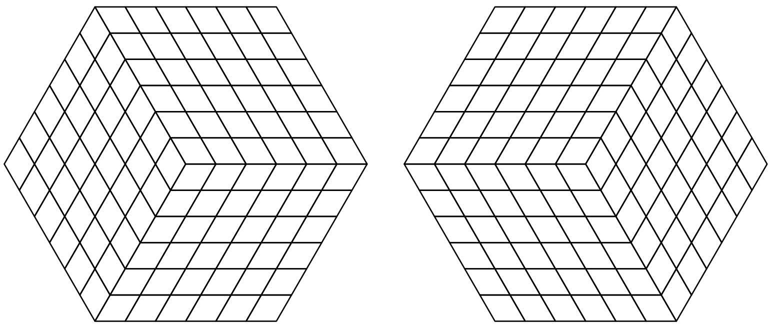
17.21. Общие внешние касательные к трём окружностям на плоскости пересекаются в точках A, B и C. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

17.22. Какое наименьшее число полосок ширины 1 требуется для того, чтобы покрыть круг диаметра d?

17.23. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и N так, что $CM + CN = AB$. Прямые AM и AN делят диагональ BD на три отрезка. Докажите, что из этих отрезков всегда можно составить треугольник, причём один угол этого треугольника равен $60°$.

17.24. На продолжениях диагоналей правильного шестиугольника выбраны точки K, L и M так, что стороны шестиугольника пересекаются со сторонами треугольника KLM в шести точках, являющихся вершинами некоторого другого шестиугольника H. Продолжим те стороны шестиугольника H, которые не лежат на сторонах треугольника KLM. Пусть P, Q, R — точки их попарных пересечений. Докажите, что точки P, Q и R лежат на продолжениях диагоналей исходного шестиугольника.

17.25. Рассмотрим такую фигуру, как на рис. 17.2 *а*, но сложенную из $3n^2$ ромбиков. Разрешается производить перестановки ромбиков, показанные на рис. 17.3. За какое наименьшее число таких операций можно получить фигуру, изображённую на рис. 17.2, *б*?



а) *б*)

Рис. 17.2

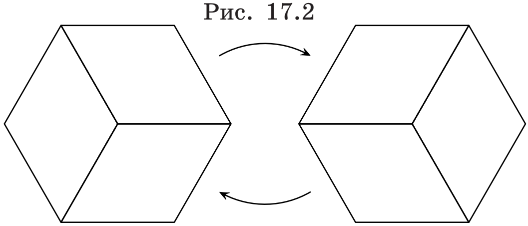


Рис. 17.3

17.26. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, причём его стороны AB, BC, CD и DA касаются её в точках K, L, M и N соответственно. Докажите, что прямые KL, MN и AC либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

17.27. Докажите, что прямые, соединяющие противоположные вершины описанного шестиугольника, пересекаются в одной точке (теорема Брианшона).

17.28. На плоскости дана конечная система точек. Её *триангуляцией* называется такой набор непересекающихся отрезков с концами этих точках, что любой другой отрезок с концами в данных точках пересекает хотя бы один из них (рис. 17.4). Докажите, что существует такая триангуляция, что ни одна из описанных окружностей получившихся треугольников не содержит внутри других точек, причём если никакие четыре данные точки не лежат на одной окружности, то такая триангуляция единственна.

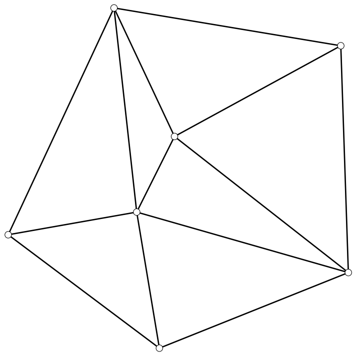


Рис. 17.4

* * *

17.29. На плоскости даны три луча с общим началом, и внутри каждого из углов, образованных этими лучами, отмечено по точке. Постройте треугольник так, чтобы его вершины лежали на данных лучах, а стороны проходили через данные точки.

17.30. На плоскости даны три параллельные прямые и три точки. Постройте треугольник, стороны (или продолжения сторон) которого проходят через данные точки, а вершины лежат на данных прямых.

См. также задачу 20.30.

Решения

17.1. В треугольнике может быть только один тупой угол, поэтому тупой угол лежит против той стороны, длина которой строго больше длин всех других сторон. В частности, наибольшая сторона треугольника не может быть стороной тупого угла.

Выберем в данном тетраэдре наибольшее ребро (если несколько рёбер тетраэдра имеют наибольшую длину, то выберем любое из них). Это ребро не может быть стороной плоского тупого угла.

17.2. Если AB — наибольшая сторона треугольника ABC, то $\angle C \geqslant \angle A$ и $\angle C \geqslant \angle B$; поэтому оба угла A и B должны быть острыми. Таким образом, к наибольшему ребру тетраэдра прилегают лишь острые углы.

17.3. Сумма углов каждой грани равна π, а граней у тетраэдра четыре. Поэтому сумма всех плоских углов тетраэдра равна 4π. А так как вершин у тетраэдра тоже четыре, то найдётся вершина, сумма плоских углов при которой не больше π. Поэтому все плоские углы при этой вершине острые, так как любой плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов (задача 6.5).

17.4. Пусть AB — наибольшее ребро тетраэдра $ABCD$. Так как

$$(AC+AD-AB)+(BC+BD-BA) = (AD+BD-AB)+(AC+BC-AB) > 0,$$

то $AC+AD-AB>0$ или $BC+BD-BA>0$. В первом случае треугольник можно составить из рёбер, выходящих из вершины A, а во втором — из рёбер, выходящих из вершины B.

17.5. Построим на плоскости угол BAC, равный α, где $\alpha = \angle SA_1A_2 = \angle SA_2A_3 = \ldots = \angle SA_nA_1$. Будем считать, что длина отрезка AB равна стороне правильного многоугольника, лежащего в основании пирамиды. Тогда для каждого $i=1, \ldots, n$ на луче AC можно так построить точку S_i, что $\Delta AS_iB = \Delta A_iSA_{i+1}$. Предположим, что не все точки S_i совпадают. Пусть S_k — ближайшая к B точка, S_l — наиболее удалённая от неё. Так как $S_kS_l > |S_kB - S_lB|$, то $|S_kA - S_lA| > |S_kB - S_lB|$, т. е. $|S_{k-1}B - S_{l-1}B| > |S_kB - S_lB|$. Но в правой части этого неравенства стоит разность между наибольшим и наименьшим числом, а в левой — разность двух чисел, заключённых между ними. Получено противоречие. Поэтому все точки S_i совпадают, а значит, точка S равноудалена от вершин основания $A_1 \ldots A_n$.

17.6. Пусть O — точка грани ABC, равноудалённая от указанных прямых. Можно считать, что A — наиболее удалённая от точки O вершина основания ABC. Рассмотрим треугольники AOB_1 и BOC_1. Стороны AB_1 и BC_1 этих треугольников равны, причём это наибольшие стороны (см. задачу 15.6), т. е. основания высот, опущенных на эти стороны, лежат на самих сторонах. А так как эти высоты равны, то из неравенства $AO \geqslant BO$ следует неравенство $OB_1 \leqslant OC_1$. В прямоугольных треугольниках BB_1O и CC_1O катеты BB_1 и CC_1 равны, поэтому $BO \leqslant CO$.

Итак, из неравенства $AO \geqslant BO$ следует неравенство $BO \leqslant CO$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что $CO \geqslant AO$ и $AO \leqslant BO$. Следовательно, $AO=BO=CO$, т. е. O — центр правильного треугольника ABC.

17.7. Рассмотрим пару планет A и B, расстояние между которыми наименьшее. Тогда их астрономы наблюдают планеты друг друга: астроном планеты A наблюдает планету B, а астроном планеты B наблюдает планету A. Возможны следующие два случая.

1. Хотя бы одну из планет A и B наблюдает ещё какой-нибудь астроном. Тогда на $2k-1$ планет остаётся $2k-2$ наблюдателя. Поэтому найдётся планета, которую никто не наблюдает.

2. Никакой из оставшихся астрономов не наблюдает ни планеты A, ни планеты B. Тогда можно выбросить эту пару планет и рассматривать такую же систему с меньшим числом планет (число планет при этом уменьшается на 2). В конце концов либо встретится первая ситуация, либо останется одна планета, которую никто не наблюдает.

17.8. Рассмотрим сначала случай двух планет. Каждая из них делится экватором, перпендикулярным соединяющему их центры отрезку, на два полушария, причём из одного полушария вторая планета видна, а из другого — нет. Заметим, что, вообще говоря, в условии задачи следовало бы уточнить, как считать — видна ли другая планета из точек этих экваторов или нет? Но так как площадь экваторов равна нулю, это не имеет никакого значения. В дальнейшем точки экваторов рассматривать не будем.

Пусть $O_1, \ldots, O_n$ — центры данных планет. Достаточно доказать, что для любого вектора $\boldsymbol{a}$ длиной 1 на планете с некоторым номером i найдётся точка X, для которой $\overrightarrow{O_iX} = \boldsymbol{a}$ и из которой не видна ни одна другая планета, причём такая точка единственна.

Докажем сначала единственность точки X. Предположим, что $\overrightarrow{O_iX} = \overrightarrow{O_jY}$ и из точек X и Y не видно никаких других планет. Но из рассмотренного выше случая двух планет следует, что если из точки X не видна планета с номером j, то из точки Y планета с номером i будет видна. Получено противоречие.

Докажем теперь существование точки X. Введём систему координат, направив ось Ox в направлении вектора $\boldsymbol{a}$. Тогда та точка данных планет, для которой координата x имеет наибольшее значение, является искомой.

17.9. Предположим, что куб разрезан на несколько попарно различных кубиков. Тогда каждая из его граней разрезана на квадратики. Выберем наименьший из всех квадратиков разбиения граней. Нетрудно убедиться, что наименьший из квадратиков разбиения квадрата не может прилегать к его границе. Поэтому кубик, основание которого — выбранный наименьший квадратик, лежит внутри «колодца», образованного прилегающими к его боковым граням кубиками. Таким образом, его грань, противолежащая основанию, должна быть заставлена ещё меньшими кубиками. Выбираем среди них наименьший и повторяем для него те же самые рассуждения. Действуя таким образом, в конце концов мы дойдём до противоположной грани, и на ней окажется квадратик разбиения, меньший, чем тот, с которого мы начинали. Но мы начинали с наименьшего из всех квадратиков разбиения граней куба. Получено противоречие.

17.10. Пусть число граней многогранника равно n. Тогда каждая его грань может иметь от трёх до $n-1$ сторон, т. е. число сторон каждой из n граней принимает одно из $n-3$ значений. Поэтому найдутся две грани с равным числом сторон.

17.11. Проведём через центр сферы три взаимно перпендикулярные плоскости и для каждой точки сферы рассмотрим её образы при симметриях относительно этих плоскостей и при композициях этих симметрий. Каждая точка, не лежащая на этих плоскостях, имеет ровно восемь образов. Следовательно, красные точки и их образы занимают не более $8 \cdot 12\% = 96\%$ площади сферы. Поэтому найдётся точка, для которой все 8 образов белые. Эти 8 точек являются вершинами прямоугольного параллелепипеда.

17.12. Ответ: да, можно. Разрежем данный куб на $13^3 = 2197$ кубиков с ребром 1. Если бы внутри каждого из этих кубиков была выбранная точка, то количество выбранных точек было бы не меньше 2197, что противоречит условию. Следовательно, внутри по крайней мере одного из этих кубиков не лежит ни одной выбранной точки.

17.13. Проведём через центр планеты и произвольную пару астероидов плоскость Π. Затем проведём через центр планеты прямую, перпендикулярную плоскости Π Она пересекает поверхность планеты в точках A и B. Наблюдатели в точках A и B видят вместе лишь $37 - 2 = 35$ астероидов, причём ни один из астероидов не могут видеть сразу оба наблюдателя. Поэтому один из них видит менее 18 астероидов.

17.14. Рассмотрим проекцию на прямую, перпендикулярную данной плоскости. Исходный шар проецируется при этом в отрезок длиной 3, а внутренние шары — в отрезки, сумма длин которых равна 25. Предположим, что требуемой плоскости не существует, т. е. любая плоскость, параллельная данной, пересекает не более восьми внутренних шаров. Тогда любая точка отрезка длиной 3 принадлежит не более чем восьми отрезкам — проекциям внутренних шаров. Следовательно, сумма длин этих отрезков не превосходит 24. Получено противоречие.

17.15. Рассмотрим многогранник P, являющийся образом многогранника P_1 при гомотетии с центром A_1 и коэффициентом 2. Докажем, что все девять многогранников лежат внутри него. Пусть A_1, $A_2^*, \ldots, A_9^*$ — вершины многогранника P. Докажем, например, что многогранник P_2 лежит внутри P. Для этого достаточно заметить, что при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ точки $A_1, A_2, \ldots, A_9$ переходят в точки A_2, A_2^*, $A_3', \ldots, A_9'$, где A_i' — середина отрезка $A_2^*A_i^*$.

Сумма объёмов многогранников $P_1, P_2, \ldots, P_9$, лежащих внутри многогранника P, равна $9V$, где V — объём многогранника P_1, а объём многогранника P равен $8V$. Следовательно, указанные девять многогранников не могут не иметь общих внутренних точек.

17.16. Ответ: да, можно. Докажем сначала, что прожектор можно повернуть так, чтобы он освещал соседние вершины A и B куба. Сечение куба плоскостью AOB, где O — центр куба, представляет собой прямоугольник с меньшей стороной AB, поэтому $\angle AOB < 90^\circ$. Поэтому из центра O куба можно осветить отрезок AB. Для этого нужно поместить отрезок AB в одной из граней освещаемого прожектором угла, а затем слегка пошевелить прожектор.

Повернём прожектор так, чтобы он освещал две вершины куба. Плоскости граней освещаемого прожектором угла разбивают пространство на восемь октантов. Так как в одном из них лежат две из восьми вершин куба, найдётся октант, не содержащий ни одной вершины. Этот октант задаёт требуемое положение прожектора.

З а м е ч а н и е. Мы не рассматриваем тот случай, когда одна из плоскостей граней октантов содержит вершину куба. От этого случая можно избавиться, слегка пошевелив прожектор.

17.17. а) Легко проверить, что середины рёбер AB, BC, CD, DA обладают требуемым свойством. В самом деле, на двух рёбрах каждой из граней лежат выбранные точки. Рассмотрим, например, грань ABC. Пусть B_1 — середина ребра AC. Тогда треугольники ABB_1 и CBB_1 накрыты кругами радиуса 0,5 с центрами в серединах сторон AB и CB соответственно.

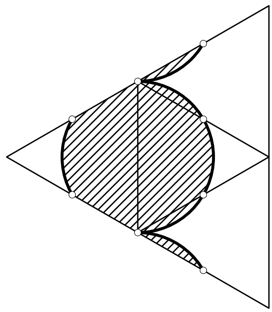


Рис. 17.5

б) Возьмём на поверхности тетраэдра три точки и рассмотрим часть поверхности тетраэдра, покрытую шарами радиуса 0,5 с центрами в этих точках. Будем говорить, что некоторый угол грани покрыт, если для некоторого числа $\varepsilon > 0$ покрыты все точки грани, удалённые от вершины данного угла меньше чем на ε. Достаточно доказать, что в случае трёх точек всегда найдётся непокрытый угол грани.

Если шар радиуса 0,5 с центром O покрывает две точки A и B, расстояние между которыми равно 1, то O — середина отрезка AB. Таким образом, если шар радиуса 0,5 покрывает две вершины тетраэдра, то его центр — середина ребра, соединяющего эти вершины. Из рис. 17.5 видно, что в этом случае шар покрывает четыре угла граней. При этом для непокрытых углов остаются непокрытыми их биссектрисы, и поэтому не может случиться так, что каждый шар в отдельности не покрывает угла, а все они вместе покрывают его. Ясно также, что если шар покрывает всего лишь одну вершину тетраэдра, то он покрывает лишь три угла.

Всего в тетраэдре имеется 12 углов граней. Таким образом, три шара радиуса 0,5 могут их покрыть, только если центры шаров — середины рёбер тетраэдра, причём даже середины несмежных рёбер, так как шары с центрами в серединах смежных рёбер имеют общий покрытый ими угол. Ясно, что в тетраэдре нельзя выбрать три несмежных ребра.

17.18. Введём наряду с координатами в плоскости, в которой движутся пешеходы, ещё и третью ось координат — ось времени. Рассмотрим графики движения пешеходов. Ясно, что пешеходы встречаются, когда их графики движения пересекаются. Из условия задачи следует, что графики третьего и четвёртого пешеходов лежат в плоскости, заданной графиками двух первых пешеходов. Поэтому графики третьего и четвёртого пешеходов пересекаются (они не могут быть параллельны, потому что тогда были бы параллельны и исходные прямые).

17.19. Возьмём в пространстве точки C_1' и C_2', не лежащие в исходной плоскости, так, что они проецируются в точки C_1 и C_2, причём прямая $C_1'C_2'$ проходит через точку O. Тогда точки пересечения прямых A_1C_1' и A_2C_2', B_1C_1' и B_2C_2' проецируются в точки пересечения прямых A_1C_1 и A_2C_2, B_1C_1 и B_2C_2. Поэтому указанные в условии задачи точки лежат на проекции прямой пересечения плоскостей $A_1B_1C_1'$ и $A_2B_2C_2'$.

17.20. Построим сферы, для которых наши окружности являются экваторами. Тогда общие хорды пар этих окружностей — проекции окружностей, по которым пересекаются построенные сферы. Поэтому достаточно доказать, что сферы имеют общую точку. Рассмотрим для этого окружность, по которой пересекаются две из наших сфер. Один конец диаметра этой окружности, лежащего в исходной плоскости, находится вне третьей сферы, а другой — внутри её. Поэтому окружность пересекает сферу, т. е. три сферы имеют общую точку.

17.21. Рассмотрим для каждой нашей окружности конус, основанием которого является данная окружность, а высота его равна её радиусу. Будем считать, что все эти конусы расположены по одну сторону от исходной плоскости Пусть O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, а O_1', O_2', O_3' — вершины конусов. Тогда точка пересечения общих внешних касательных к окружностям с номерами i и j совпадает с точкой пересечения прямой $O_i'O_j'$ с исходной плоскостью. Таким образом, точки A, B и C лежат на прямой пересечения плоскости $O_1'O_2'O_3'$ с исходной плоскостью.

17.22. О т в е т: наименьшее целое число, которое не меньше d. При решении этой задачи воспользуемся тем, что площадь полоски, высекаемой на сфере диаметра d двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно h, равняется πdh (см. задачу 4.22).

Пусть круг диаметра d покрыт k полосками ширины 1. Рассмотрим сферу, для которой этот круг служит экватором. Проведя через границы полосок плоскости, перпендикулярные экватору, получим на сфере сферические полоски, причём площадь каждой из них равна πd (точнее говоря, не превосходит πd, так как одна граница исходной полоски может не пересекать круга). Сферические полоски тоже покрывают всю сферу, поэтому их площадь не меньше площади сферы, т. е. $k\pi d \geqslant \pi d^2$ и $k \geqslant d$. Ясно, что если $k \geqslant d$, то k параллельными полосками можно покрыть круг диаметра d.

17.23. Достроим квадрат $ABCD$ до куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Из условия задачи следует, что $CM = DN$ и $BM = CN$. Возьмём на ребре BB_1 точку K так, что $BK = DN$. Пусть отрезки AM и AN пересекают диагональ BD в точках P и Q, а R — точка пересечения отрезков AK и BA_1. Докажем, что стороны треугольника PBR равны соответствующим отрезкам диагонали BD. Ясно, что $BR = DQ$. Докажем теперь, что $PR = PQ$. Так как $BK = CM$ и $BM = CN$, то $KM = MN$, а значит, $\triangle AKM = \triangle ANM$. Кроме того, $KR = NQ$, поэтому $RP = PQ$. Остаётся заметить, что $\angle RBP = \angle A_1BD = 60^\circ$, так как треугольник A_1BD равносторонний.

17.24. Обозначим исходный шестиугольник через $ABCC_1D_1A_1$ и будем считать, что он является проекцией куба $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ на плоскость, перпендикулярную диагонали $D'B_1'$. Пусть K', L', M' — точки прямых $B_1'C_1'$, $B_1'B'$ и $B_1'A_1'$, проецирующиеся в точки K, L и M (рис. 17.6). Тогда H — это сечение куба плоскостью $K'L'M'$, в частности, стороны треугольника PQR лежат на проекциях прямых, по которым плоскость $K'L'M'$ пересекается с плоскостями нижних граней куба (мы считаем, что точка B_1' расположена выше точки D'). Следовательно, точки P, Q, R являются проекциями точек пересечения продолжений нижних рёбер куба ($D'A'$, $D'C'$, $D'D_1'$) с плоскостью $K'L'M'$, а значит, они лежат на продолжениях диагоналей исходного шестиугольника.

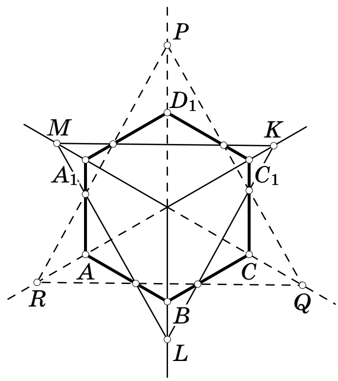


Рис. 17.6

17.25. Рассмотрим проекцию куба, сложенного из n^3 кубиков, на плоскость, перпендикулярную его диагонали. Тогда рис. 17.2, *а* можно рассматривать как проекцию всего этого куба, а рис. 17.2, *б* — как проекцию лишь задних граней куба. Допустимая операция — это вставка или убирание кубика, причём вставлять кубик можно только так, что три его грани соприкасаются с уже имеющимися гранями. Ясно, что n^3 кубиков меньше чем за n^3 операций вынуть нельзя, а за n^3 операций их вынуть можно.

17.26. Проведём через вершины четырёхугольника $ABCD$ перпендикуляры к плоскости, в которой он расположен. Отложим на них отрезки AA', BB', CC' и DD', равные касательным, проведённым к окружности из соответствующих

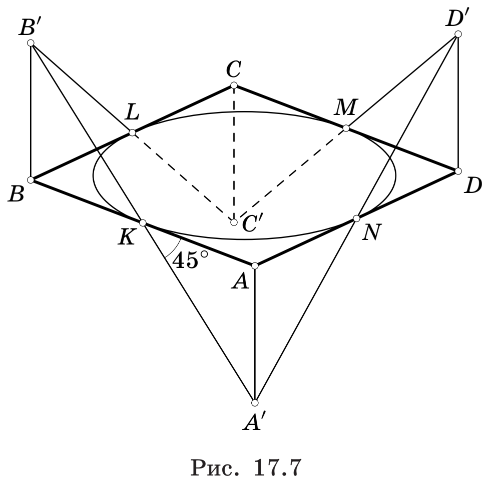


Рис. 17.7

вершин четырёхугольника, причём так, что точки A' и C' лежат по сторону от исходной плоскости, а B' и D' — по другую (рис. 17.7). Так как $AA' \parallel BB'$ и $\angle AKA' = 45^\circ = \angle BKB'$, точка K лежит на отрезке $A'B'$. Аналогично точка L лежит на отрезке $B'C'$, а значит, прямая KL лежит в плоскости $A'B'C'$. Аналогично прямая MN лежит в плоскости $A'D'C'$.

Если прямая $A'C'$ параллельна исходной плоскости, то прямые AC, KL и MN параллельны прямой $A'C'$. Пусть теперь прямая $A'C'$ пересекает исходную плоскость в точке P, т. е. P — точка пересечения плоскостей $A'B'C'$, $A'D'C'$ и исходной плоскости. Тогда прямые KL, AC и MN проходят через точку P.

17.27. Проведём через вершины шестиугольника $ABCDEF$ перпендикуляры к плоскости, в которой он лежит, и отложим на них отрезки $AA', \ldots, FF'$, равные касательным, проведённым к окружности из соответствующих вершин, причём отложим так, что точки A', C' и E' лежат по одну сторону от исходной плоскости, а B', D' и F' — по другую (рис. 17.8). Докажем, что прямые $A'B'$ и $E'D'$ лежат в одной плоскости. Если $AB \parallel ED$, то $A'B' \parallel E'D'$. Если же прямые AB и ED пересекаются в некоторой точке P, то отложим на перпендикуляре к исходной плоскости, проведённом через точку P, отрезки PP' и PP'', равные касательной к окружности, проведённой из точки P. Пусть Q — точка касания окружности со стороной AB. Тогда отрезки $P'Q$, $P''Q$, $A'Q$ и $B'Q$ образуют с прямой AB углы 45° и лежат в плоскости, перпендикулярной исходной

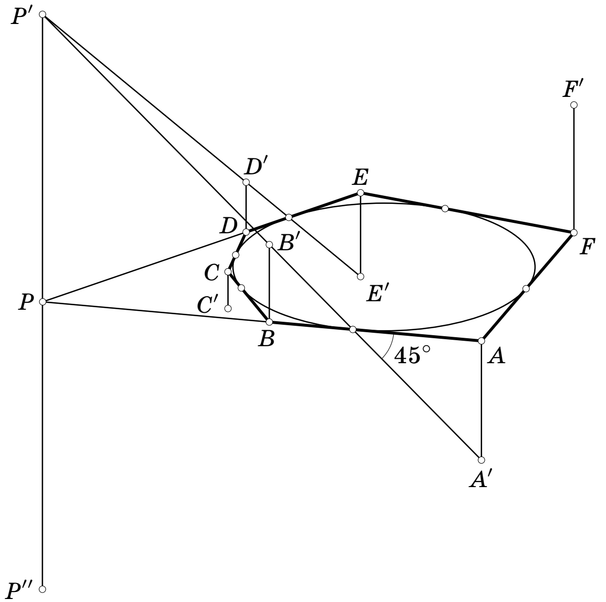


Рис. 17.8

плоскости и проходящей через прямую AB. Поэтому прямая $A'B'$ проходит либо через точку P', либо через точку P''. Нетрудно убедиться, что через ту же точку проходит и прямая $E'D'$, Таким образом, прямые $A'B'$ и $E'D'$ пересекаются, а значит, прямые $A'D'$ и $B'E'$ тоже пересекаются. Аналогично доказывается, что прямые $A'D'$, $B'E'$ и $C'F'$ попарно пересекаются. Но так как эти прямые не лежат в одной плоскости, они должны пересекаться в одной точке. Прямые AD, BE и CF проходят через проекцию этой точки на исходную плоскость.

17.28. Возьмём произвольную сферу, касающуюся данной плоскости, и рассмотрим стереографическую проекцию плоскости на сферу. На сфере получается конечная система точек, и они являются вершинами некоторого выпуклого многогранника. Для получения требуемой триангуляции нужно соединить те исходные точки, образы которых на сфере соединены рёбрами получившегося выпуклого многогранника. Единственность триангуляции эквивалентна тому, что все грани многогранника являются треугольниками, а это, в свою очередь, эквивалентно тому, что никакие четыре данные точки не лежат на одной окружности.

17.29. Данные лучи и точки можно представить как изображение проекции трёхгранного угла с тремя отмеченными на его гранях точками. В задаче требуется построить сечение этого угла плоскостью, проходящей через данные точки. Соответствующее построение описано в решении задачи 10.22 (б).

17.30. Данные прямые можно представить как проекции прямых, на которых лежат рёбра трёхгранной призмы, а данные точки — как проекции точек, лежащих на её гранях (или на продолжениях граней). В задаче требуется построить сечение призмы плоскостью, проходящей через данные точки. Соответствующее построение описано в решении задачи 10.23.

ГЛАВА 18

ЦЕНТР МАСС. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ. БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

§ 1. Центр масс и его основные свойства

Пусть в пространстве задана система n точек с приписанными им массами, т. е. имеется набор n пар (X_i, m_i), где X_i — точка пространства, m_i — некоторое число, причём $m_1 + \ldots + m_n \neq 0$. *Центром масс* системы точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$ называют точку O, для которой выполняется равенство $m_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \vec{0}$.

18.1. а) Докажите, что центр масс системы точек существует и единствен.

б) Докажите, что если X — произвольная точка, а O — центр масс точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$, то

$$\overrightarrow{XO} = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_n}(m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{XX_n}).$$

18.2. Докажите, что центр масс системы точек $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_m$ с массами $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ совпадает с центром масс двух точек — центра масс X первой системы с массой $a_1 + \ldots + a_n$ и центра масс Y второй системы с массой $b_1 + \ldots + b_m$.

18.3. а) Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, причём каждая из них делится этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершины.

б) Докажите, что в той же точке пересекаются бимедианы тетраэдра, причём каждая из них делится этой точкой пополам.

18.4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость A_1DB пересекает диагональ AC_1 в точке M. Докажите, что $AM : AC_1 = 1 : 3$.

18.5. Даны треугольник ABC и прямая l; A_1, B_1 и C_1 — произвольные точки прямой l. Найдите геометрическое место центров масс треугольников с вершинами в серединах отрезков AA_1, BB_1 и CC_1.

18.6. На сторонах AB, BC, CD и DA пространственного четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N так, что

$$AK : KB = DM : MC = p \quad \text{и} \quad BL : LC = AN : ND = q.$$

Докажите, что отрезки KM и LN пересекаются в одной точке O, причём $KO:OM=q$ и $NO:OL=p$.

18.7. Пусть M — центр масс тетраэдра $ABCD$. Выразите длину отрезка DM через длины рёбер тетраэдра.

18.8. Сфера S с центром O описана вокруг тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Через точку X, лежащую внутри этой сферы, проведена прямая A_iX ($i=1, 2, 3, 4$), которая вторично пересекает сферу в точке A_i'. Докажите, что

$$\frac{A_1X}{A_1'X}+\frac{A_2X}{A_2'X}+\frac{A_3X}{A_3'X}+\frac{A_4X}{A_4'X}=4$$

тогда и только тогда, когда точка X лежит на сфере с диаметром OM, где M — центр масс тетраэдра.

18.9. Даны тетраэдр $ABCD$, плоскость Π и точка X. Плоскость Π пересекает рёбра DA, DB, DC (или их продолжения) в точках A_1, B_1, C_1. Плоскости, проходящие через точку X и рёбра BC, CA, AB, пересекают рёбра DA, DB, DC (или их продолжения) в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что точка X лежит в плоскости Π тогда и только тогда, когда

$$\frac{AA_1}{A_1D}\cdot\frac{DA_2}{A_2A}+\frac{BB_1}{B_1D}\cdot\frac{DB_2}{B_2B}+\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DC_2}{C_2C}=1$$

(отношения отрезков считаются ориентированными).

18.10. На продолжениях высот тетраэдра $ABCD$ за вершины отложены отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1, длины которых обратно пропорциональны высотам. Докажите, что центры масс тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают.

18.11. Две плоскости пересекают боковые рёбра правильной n-угольной призмы в точках $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ соответственно, причём эти плоскости не имеют общих точек внутри призмы. Пусть M и N — центры масс многоугольников $A_1 \ldots A_n$ и $B_1 \ldots B_n$.

а) Докажите, что сумма длин отрезков $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ равна nMN.

б) Докажите, что объём части призмы, заключённой между этими плоскостями, равен $S\cdot MN$, где S — площадь основания призмы.

18.12. Точки $A_1, \ldots, A_n$ с единичными массами лежат на сфере. Для каждых $n-2$ точек рассмотрим плоскость, которая проходит через их центр масс перпендикулярно прямой, соединяющей две оставшиеся точки. Докажите, что все эти плоскости проходят через одну точку (*точка Кантора*).

18.13. Четыре сферы попарно касаются друг друга. Возьмём точку касания двух сфер и соединим её с точкой касания двух оставшихся сфер. Так мы получим три прямые. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

См. также задачу 12.27.

§ 2. Момент инерции

Величину $I_M = m_1 MX_1^2 + \ldots + m_n MX_n^2$ называют *моментом инерции* относительно точки M системы точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$.

18.14. Пусть O — центр масс системы точек, суммарная масса которой равна m. Докажите, что моменты инерции этой системы относительно точки O и произвольной точки X связаны соотношением $I_X = I_O + mXO^2$.

18.15. а) Докажите, что момент инерции относительно центра масс системы точек с единичными массами равен $\frac{1}{n}\sum\limits_{i<j} a_{ij}^2$, где n — число точек, a_{ij} — расстояние между точками с номерами i и j.

б) Докажите, что момент инерции относительно центра масс системы точек с массами $m_1, \ldots, m_n$ равен $\frac{1}{m}\sum\limits_{i<j} m_i m_j a_{ij}^2$, где $m = m_1 + \ldots + m_n$, a_{ij} — расстояние между точками с номерами i и j.

18.16. Докажите, что сумма квадратов длин медиан тетраэдра равна 4/9 суммы квадратов длин его рёбер.

18.17. В вершины тетраэдра помещены единичные массы. Докажите, что момент инерции этой системы относительно центра масс равен сумме квадратов расстояний между серединами противоположных рёбер тетраэдра.

18.18. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек X пространства, что $XA^2 + XB^2 = XC^2$.

18.19. Два треугольника — правильный со стороной a и равнобедренный прямоугольный с катетами, равными b,— расположены в пространстве так, что их центры масс совпадают. Найдите сумму квадратов расстояний от всех вершин одного из них до всех вершин другого.

18.20. Внутри сферы радиуса R расположено n точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не превосходит n^2R^2.

18.21. Точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на одной сфере, а M — их центр масс. Прямые $MA_1, \ldots, MA_n$ пересекают эту сферу в точках $B_1, \ldots, B_n$ (отличных от $A_1, \ldots, A_n$). Докажите, что $MA_1 + \ldots + MA_n \leqslant MB_1 + \ldots + MB_n$.

§ 3. Барицентрические координаты

Пусть в пространстве задан тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. Если точка X является центром масс вершин этого тетраэдра с массами m_1, m_2, m_3 и m_4, то числа $(m_1 : m_2 : m_3 : m_4)$ называют *барицентрическими координатами* точки X относительно тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Иногда для краткости эти барицентрические координаты мы будем обозначать (m_i). Задача 18.22 показывает, что барицентрические координаты точки определены однозначно с точностью до умножения на одно и то же число, отличное от нуля.

18.22. Пусть в пространстве задан тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$.

а) Докажите, что любая точка X имеет некоторые барицентрические координаты относительно него.

б) Докажите, что при условии $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1$ барицентрические координаты точки X определены однозначно.

18.23. В системе барицентрических координат, связанных с тетраэдром $A_1A_2A_3A_4$, найдите уравнение:

а) прямой A_1A_2;

б) плоскости $A_1A_2A_3$;

в) плоскости, проходящей через A_3A_4 параллельно A_1A_2.

18.24. Докажите, что если точка с барицентрическими координатами (x_i) и (y_i) принадлежит некоторой прямой, то той же прямой принадлежит точка с барицентрическими координатами $(x_i + y_i)$.

18.25. Докажите, что барицентрические координаты точки X, лежащей внутри тетраэдра $ABCD$, равны $(V_{XBCD} : V_{XACD} : V_{XABD} : V_{XABC})$.

18.26. Пусть S_a, S_b, S_c и S_d — площади граней BCD, ACD, ABD и ABC тетраэдра $ABCD$. Докажите, что в системе барицентрических координат, связанных с тетраэдром $ABCD$:

а) центр вписанной сферы имеет барицентрические координаты $(S_a : S_b : S_c : S_d)$;

б) центр вневписанной сферы, касающейся грани ABC, имеет барицентрические координаты $(S_a : S_b : S_c : -S_d)$.

18.27. Найдите уравнение описанной сферы тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ в барицентрических координатах, связанных с ним.

18.28. а) Докажите, что если центры I_1, I_2, I_3 и I_4 вневписанных сфер, касающихся граней тетраэдра, расположены на его описанной сфере, то этот тетраэдр равногранный.

б) Докажите, что верно и обратное: для равногранного тетраэдра точки I_1, I_2, I_3 и I_4 лежат на описанной сфере.

18.29. Площади граней BCD, ACD, ABD, ABC тетраэдра $ABCD$ равны S_A, S_B, S_C, S_D. Докажите, что точки с барицентрическими координатами $(\alpha:\beta:\gamma:\delta)$ и $\left(\frac{S_A^2}{\alpha}:\frac{S_B^2}{\beta}:\frac{S_C^2}{\gamma}:\frac{S_D^2}{\delta}\right)$ изогонально сопряжены.

См. также задачи 8.82, 8.83, 8.84, 8.85.

Решения

18.1. Пусть X и O — произвольные точки. Тогда $m_1\overrightarrow{OX_1}+\ldots+m_n\overrightarrow{OX_n}=(m_1+\ldots+m_n)\overrightarrow{OX}+m_1\overrightarrow{XX_1}+\ldots+m_n\overrightarrow{XX_n}$, поэтому точка O является центром масс данной системы точек тогда и только тогда, когда $(m_1+\ldots+m_n)\overrightarrow{OX}+m_1\overrightarrow{XX_1}+\ldots+m_n\overrightarrow{XX_n}=\overrightarrow{0}$, т. е. $\overrightarrow{XO}=\dfrac{1}{m_1+\ldots+m_n}(m_1\overrightarrow{XX_1}+\ldots+m_n\overrightarrow{XX_n})$. Из этого рассуждения вытекают решения обеих задач.

18.2. Пусть Z — произвольная точка, $a=a_1+\ldots+a_n$, $b=b_1+\ldots+b_m$. Тогда $\overrightarrow{ZX}=\dfrac{1}{a}(a_1\overrightarrow{ZX_1}+\ldots+a_n\overrightarrow{ZX_n})$ и $\overrightarrow{ZY}=\dfrac{1}{b}(b_1\overrightarrow{ZY_1}+\ldots+b_m\overrightarrow{ZY_m})$. Если O — центр масс точки X с массой a и точки Y с массой b, то $\overrightarrow{ZO}=\dfrac{1}{a+b}(a\overrightarrow{ZX}+b\overrightarrow{ZY})=\dfrac{1}{a+b}(a_1\overrightarrow{ZX_1}+\ldots+a_n\overrightarrow{ZX_n}+b_1\overrightarrow{ZY_1}+\ldots+b_m\overrightarrow{ZY_m})$, т. е. O — центр масс системы точек $X_1,\ldots,X_n$, $Y_1,\ldots,Y_m$ с массами $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_m$.

18.3. Поместим в вершины тетраэдра единичные массы. Центр масс этих точек расположен на отрезке, соединяющем вершину тетраэдра с центром масс вершин противоположной грани, причём он делит этот отрезок в отношении $3:1$, считая от вершины, Таким образом, все медианы тетраэдра проходят через его центр масс.

Центр масс вершин тетраэдра расположен также на отрезке, соединяющем центры масс противоположных рёбер (т. е. их середины), причём он делит этот отрезок пополам.

18.4. Поместим в точки A_1, B и D единичные массы. Пусть O — центр масс этой системы. Тогда

$$3\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1},$$

т. е. точка O лежит на диагонали AC_1. С другой стороны, центр масс точек A_1, B и D лежит в плоскости A_1BD, поэтому $O=M$, а значит, $3\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC_1}$.

18.5. Поместим в точки A, B, C, A_1, B_1 и C_1 единичные массы. С одной стороны, центр масс этой системы совпадает с центром масс треугольника с вершинами в серединах отрезков AA_1, BB_1 и CC_1. С другой стороны, он совпадает с серединой отрезка, соединяющего центр масс X точек A_1, B_1 и C_1 с центром масс M треугольника ABC. Точка M фиксирована, а точка X перемещается по прямой l. Поэтому середина отрезка MX лежит на прямой, гомотетичной прямой l с центром M и коэффициентом $\dfrac{1}{2}$.

18.6. Поместим в точки A, B, C и D массы 1, p, pq и q соответственно и рассмотрим центр масс P этой системы точек. Так как K — центр масс точек A и B, а M — центр масс точек C и D, то точка P лежит на отрезке KM, причём $KP:PM=(pq+q):(1+p)=q$. Аналогично точка P лежит на отрезке LN, причём $NP:PL=p$.

18.7. Пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{DA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{DB}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{DC}$, $\boldsymbol{b}'=\overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{b}'=\overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{c}'=\overrightarrow{AB}$. Тогда $4\overrightarrow{DM}=$ $=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. Ясно, что

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = a^2+b^2+c^2+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}).$$

Кроме того, $a'^2=|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|^2=b^2+c^2-2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$, поэтому $2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=b^2+c^2-a'^2$. Аналогично выражаем $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})$ и $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$. В результате получаем

$$DM^2 = \frac{3}{16}\Big(a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}(a'^2+b'^2+c'^2)\Big).$$

18.8. Ясно, что

$$\frac{A_iX}{A_i'X} = \frac{A_iX^2}{A_i'X\cdot A_iX} = \frac{A_iX^2}{R^2-OX^2},$$

где R — радиус описанной сферы. Поэтому указанное равенство эквивалентно тому, что

$$4(R^2-OX^2) = \sum A_iX^2 = \sum|\overrightarrow{A_iO}-\overrightarrow{OX}|^2 =$$
$$= 4(R^2+OX^2)-2\big(\sum\overrightarrow{A_iO},\overrightarrow{OX}\big) = 4(R^2+OX^2-2(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{OX})),$$

т. е. $OX^2=(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{OX})$. Полученное равенство можно переписать в виде

$$\left|\overrightarrow{OX}-\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}\right|^2 = \frac{1}{4}MO^2.$$

Это равенство эквивалентно тому, что точка X лежит на сфере с диаметром OM.

18.9. Поместим в вершины A, B, C и D массы $a_2=\dfrac{DA_2}{A_2A}$, $b_2=\dfrac{DB_2}{B_2B}$, $c_2=\dfrac{DC_2}{C_2C}$ и 1. Тогда точка X является центром масс этой системы точек. Ясно также, что центр масс лежит в плоскости Π тогда и только тогда, когда

$$a_2d_A+b_2d_B+c_2d_C+d_D = 0,$$

где d_A, d_B, d_C, d_D — расстояния от вершин тетраэдра $ABCD$ до плоскости Π (с учётом знака, т. е. расстояния имеют одинаковые знаки тогда и только тогда, когда вершины лежат по одну сторону от плоскости Π). Остаётся заметить, что $\dfrac{d_A}{d_D}=-\dfrac{AA_1}{A_1D}$, $\dfrac{d_B}{d_D}=-\dfrac{BB_1}{B_1D}$, $\dfrac{d_C}{d_D}=-\dfrac{CC_1}{C_1D}$.

18.10. Пусть M — центр масс тетраэдра $ABCD$. Тогда

$$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MD_1} =$$
$$= (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})+(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}) = \overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}.$$

Векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ перпендикулярны граням тетраэдра, а их длины пропорциональны площадям граней (это следует из того, что площади граней тетраэдра обратно пропорциональны длинам высот, опущенных на них). Следовательно, сумма этих векторов равна нулю (см. задачу 11.30), а значит, M — центр масс тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$.

18.11. а) Так как $\overrightarrow{MA_1} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{MB_1} + \ldots + \overrightarrow{MB_n} = \vec{0}$, то, складывая равенства $\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{B_iN} = \overrightarrow{MN}$ для всех $i = 1, \ldots, n$, получаем $\overrightarrow{A_1B_1} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n} = n\overrightarrow{MN}$. Следовательно, отрезок MN параллелен рёбрам призмы, и $A_1B_1 + \ldots + A_nB_n = nMN$.

Заметим также, что если вместо многоугольника $B_i \ldots B_n$ мы возьмём одно из оснований призмы, то получим, что прямая MN проходит через центры оснований призмы.

б) Разобьём основание призмы на треугольники, соединив центр с вершинами; площади этих треугольников равны. Рассмотрев треугольные призмы, основаниями которых служат полученные треугольники, данную часть призмы можно разрезать на многогранники с треугольными основаниями и параллельными боковыми рёбрами. Согласно задаче 3.21 объёмы этих многогранников равны

$$\frac{S(A_1B_1 + A_2B_2 + MN)}{3n}, \quad \ldots, \quad \frac{S(A_nB_n + A_1B_1 + MN)}{3n}.$$

Поэтому объём всей части призмы, заключённой между данными плоскостями, равен $\dfrac{S(2(A_1B_1 + \ldots + A_nB_n) + nMN)}{3n}$. Остаётся заметить, что $A_1B_1 + \ldots + A_nB_n = nMN$.

18.12. Пусть O — центр сферы, M — центр масс всех точек, M_{n-2} — центра масс выбранных $n-2$ точек, M_2 — центр масс двух оставшихся точек. Тогда точка M лежит на отрезке M_2M_{n-2}, причём $M_2M : MM_{n-2} = (n-2) : 2$. Поэтому прямая, проходящая через точку M_{n-2} параллельно прямой OM_2, пересекает прямую OM в такой точке K, что точка M лежит на отрезке OK и при этом $OM : MK = (n-2) : 2$. Ясно, что точка K не зависит от того, какие именно $n-2$ точки мы выбираем. С другой стороны, плоскость, проходящая через центр масс выбранных точек перпендикулярно прямой, соединяющей две оставшиеся точки, содержит прямую, проходящую через точку M_{n-2} параллельно прямой OM_2, поскольку прямая OM_2 перпендикулярна прямой, соединяющей две оставшиеся точки.

18.13. Пусть сфера радиуса r_i с центром X_i и сфера радиуса r_j с центром X_j касаются в точке T_{ij}. Если сферы касаются внешним образом, то точка T_{ij} является центром масс точки X_i с массой r_j и точки X_j с массой r_i. Если сфера с номером i лежит внутри сферы с номером j, то точка T_{ij} является центром масс точки X_i с массой $-r_j$ и точки X_j с массой r_i. Нам будет удобнее заменить $\pm r_j$ на $m_i = \dfrac{1}{r_i}$, а r_i — на $m_j = \pm\dfrac{1}{r_j}$; центр масс при этом не изменяется, но теперь масса m_i находится в точке X_i, а не в точке X_j.

Итак, мы поступаем следующим образом. Если сфера с центром X_i и радиусом r_i не содержит других сфер, то мы полагаем $m_i = \dfrac{1}{r_i}$, а если содержит, то мы полагаем $m_i = -\dfrac{1}{r_i}$ (в последнем случае она содержит все три оставшиеся сферы). Центр масс M четырёх точек X_i с массами m_i является центром масс точки T_{12} с массой m_1+m_2 и точки T_{34} с массой m_3+m_4. Поэтому точка M лежит на прямой $T_{12}T_{34}$. Аналогично доказывается, что она лежит на прямых $T_{13}T_{24}$ и $T_{14}T_{23}$.

18.14. Занумеруем точки данной системы. Пусть $\boldsymbol{x}$ — вектор с началом в точке O и концом в точке с номером i, причём этой точке приписана масса m_i. Тогда $\sum m_i\boldsymbol{x}_i=\vec{0}$. Пусть, далее, $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{XO}$. Тогда $I_O=\sum m_i x_i^2$,

$$I_X=\sum m_i(\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{a})^2=\sum m_i x_i^2+2\Big(\sum m_i\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{a}\Big)+\sum m_i a^2=I_O=ma^2.$$

18.15. а) Пусть $\boldsymbol{x}_i$ — вектор с началом в центре масс O и концом в точке с номером i. Тогда $\sum\limits_{i,j}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)^2=\sum\limits_{i,j}(x_i^2+x_j^2)-2\sum\limits_{i,j}(\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{x}_j)$, где суммирование ведётся по всем возможным парам номеров точек. Ясно, что $\sum\limits_{i,j}(x_i^2+x_j^2)=$ $=2n\sum\limits_i x_i^2=2nI_O$ и $\sum\limits_{i,j}(\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{x}_j)=\sum\limits_i(\boldsymbol{x}_i,\,\sum\limits_j\boldsymbol{x}_j)=0$. Поэтому $2nI_O=\sum\limits_{i,j}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)^2=$ $=2\sum\limits_{i<j}a_{ij}^2$.

б) Пусть $\boldsymbol{x}_i$ — вектор с началом в центре масс O и концом в точке с номером i. Тогда $\sum\limits_{i,j}m_im_j(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)^2=\sum\limits_{i,j}m_im_j(x_i^2+x_j^2)-2\sum\limits_{i,j}m_im_j(\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{x}_j)$. Ясно, что

$$\sum_{i,j}m_im_j(x_i^2+x_j^2)=\sum_i m_i\sum_j(m_jx_i^2+m_jx_j^2)=\sum_i m_i(mx_i^2+I_O)=2mI_O$$

и

$$\sum_{i,j}m_im_j(\boldsymbol{x}_i,\,\boldsymbol{x}_j)=\sum_i m_i(\boldsymbol{x}_i,\,\sum_j m_j\boldsymbol{x}_j)=0.$$

Поэтому $2mI_O=\sum\limits_{i,j}m_im_j(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)^2=2\sum\limits_{i<j}m_im_ja_{ij}^2$.

18.16. Поместим в вершины тетраэдра единичные массы. Так как их центр масс — точка пересечения медиан тетраэдра — делит каждую медиану в отношении $3:1$, то момент инерции тетраэдра относительно центра масс равен $\left(\frac{3}{4}m_a\right)^2+\left(\frac{3}{4}m_b\right)^2+\left(\frac{3}{4}m_c\right)^2+\left(\frac{3}{4}m_d\right)^2=\frac{9}{16}(m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2)$. С другой стороны, согласно задаче 18.15 он равен сумме квадратов длин рёбер тетраэдра, делённой на 4.

18.17. Центр масс O тетраэдра $ABCD$ является точкой пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных рёбер тетраэдра, причём точка O делит каждый из этих отрезков пополам (задача 18.3 (б)). Если K — середина ребра AB, то $AO^2+BO^2=2OK^2+\frac{1}{2}AB^2$. Запишем такие равенства для всех рёбер тетраэдра и сложим их. Так как из каждой вершины выходят 3 ребра, в левой части получится $3I_O$. Если L — середина ребра CD, то $2OK^2+2OL^2=KL^2$. Кроме того, как следует из задачи 18.15 (а), сумма квадратов длин рёбер тетраэдра равна $4I_O$. Поэтому в правой части равенства получится $d+2I_O$, где d — сумма квадратов расстояний между серединами противоположных рёбер тетраэдра. После сокращения получаем требуемое.

18.18. Поместим в вершины A и B массы $+1$, а в вершину C — массу -1. Центр масс M этой системы точек является вершиной параллелограмма $ACBM$. По условию $I_X = XA^2 + XB^2 - XC^2 = 0$, а так как $I_X = (1+1-1)MX^2 + I_M$ (задача 18.14), то $MX^2 = -I_M = a^2 + b^2 - c^2$, где a, b и c — длины сторон треугольника ABC (задача 18.15 (б)). Итак, если $\angle C < 90^\circ$, то искомое ГМТ — сфера радиуса $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ с центром M.

18.19. Ответ: $3a^2 + 4b^2$. Если M — центр масс треугольника ABC, то $I_M = \dfrac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{3}$ (см. задачу 14.10 (а)), поэтому для любой точки X имеет место равенство

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = I_X = 3XM^2 + I_M = 3XM^2 + \frac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{3}.$$

Если ABC — данный прямоугольный треугольник, $A_1B_1C_1$ — данный правильный треугольник, а M — их общий центр масс, то $A_1A^2 + A_1B^2 + A_1C^2 = 3A_1M^2 + \dfrac{4}{3}b^2 = a^2 + \dfrac{4}{3}b^2$. Записав аналогичные равенства для точек B_1 и C_1 и сложив их, получим, что искомая сумма квадратов равна $3a^2 + 4b^2$.

18.20. Поместим в данные точки единичные массы. Как следует из результата задачи 18.15 (а), сумма квадратов попарных расстояний между этими точками равна nI, где I — момент инерции системы точек относительно центра масс. Рассмотрим теперь момент инерции системы относительно центра O сферы. С одной стороны, $I \leqslant I_O$ (см. задачу 18.14). С другой стороны, так как расстояние от точки O до любой из данных точек не превосходит R, то $I_O \leqslant nR^2$. Поэтому $nI \leqslant n^2R^2$, причём равенство достигается, только если $I = I_O$ (т. е. центр масс совпадает с центром сферы) и $I_O = nR^2$ (т. е. все точки расположены на поверхности данной сферы).

18.21. Пусть O — центр данной сферы. Если хорда AB проходит через точку M, то $AM \cdot BM = R^2 - d^2$, где $d = MO$. Обозначим через I_X момент инерции системы точек $A_1, \ldots, A_n$ относительно точки X. Тогда $I_O = I_M + nd^2$ (см. задачу 18.14). С другой стороны, так как $OA_i = R$, то $I_O = nR^2$. Поэтому $A_iM \cdot B_iM = R^2 - d^2 = \dfrac{I_M}{n} = \dfrac{1}{n}(A_1M^2 + \ldots + A_nM^2)$. Таким образом, если ввести обозначение $a_i = A_iM$, то требуемое неравенство перепишется в виде

$$a_1 + \ldots + a_n \leqslant \frac{1}{n}(a_1^2 + \ldots + a_n^2)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Для доказательства этого неравенства следует воспользоваться неравенством $x + y \leqslant \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$ (последнее неравенство получается из неравенства $xy \leqslant x^2 + y^2$ умножением обеих частей на $\dfrac{x+y}{xy}$).

18.22. Введём следующие обозначения: $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{A_4A_1}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{A_4A_2}$, $\boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{A_4A_3}$ и $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{XA_4}$. Точка X является центром масс вершин тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ с массами m_1, m_2, m_3 и m_4 тогда и только тогда, когда $m_1(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_1) + m_2(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_2) + m_3(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_3) + m_4\boldsymbol{x} = \overrightarrow{0}$, т. е. $m\boldsymbol{x} = -(m_1\boldsymbol{e}_1 + m_2\boldsymbol{e}_2 + m_3\boldsymbol{e}_3 + m_4\boldsymbol{x})$, где $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$. Будем считать, что $m = 1$. Любой вектор $\boldsymbol{x}$ можно представить в виде $\boldsymbol{x}=-m_1\boldsymbol{e}_1-m_2\boldsymbol{e}_2-m_3\boldsymbol{e}_3$, причём числа m_1, m_2 и m_3 определены однозначно. Число m_4 находится по формуле $m_4=1-m_1-m_2-m_3$.

18.23. Точка с барицентрическими координатами $(x_1:x_2:x_3:x_4)$:

а) лежит на прямой A_1A_2, если $x_3=x_4=0$;

б) лежит в плоскости $A_1A_2A_3$, если $x_4=0$.

в) Воспользуемся обозначениями задачи из 18.22. Точка X лежит в указанной плоскости, если $\boldsymbol{x}=\lambda(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)+\mu\boldsymbol{e}_3$, т. е. $x_1=-x_2$.

18.24. Точка с барицентрическими координатами (x_i+y_i) является центром масс точек с барицентрическими координатами (x_i) и (y_i). Ясно также, что центр масс двух точек лежит на прямой, проходящей через них.

18.25. Пусть точка X является центром масс вершин тетраэдра $ABCD$ с массами m_A, m_B, m_C, m_D. Если плоскость XCD пересекает ребро AB в точке P, то $AP:PB=M_B:M_A$. Поэтому нужно проверить, что

$$AP : PB = V_{XACD} : V_{XBCD}.$$

Отношение $AP:PB$ равно отношению высот тетраэдров $XACD$ и $XBCD$, опущенных на грань XCD. Грань XCD у этих тетраэдров общая, поэтому отношение высот равно $V_{XACD}:V_{XBCD}$.

18.26. а) Центр вписанной сферы является точкой пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов тетраэдра. Пусть M — точка пересечения ребра AB с биссекторной плоскостью двугранного угла при ребре CD. Тогда $AM:MB=S_b:S_a$ (задача 3.25), поэтому точка M имеет барицентрические координаты $(S_a:S_b:0:0)$. Биссекторная плоскость двугранного угла при ребре CD проходит через точку с координатами $(S_a:S_b:0:0)$ и через прямую CD, точки которой имеют координаты $(0:0:x:y)$. Следовательно, эта плоскость состоит из точек с координатами $(S_a:S_b:x:y)$ (см. задачу 18.24). Таким образом, точка $(S_a:S_b:S_c:S_d)$ принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла при ребре CD. Аналогично доказывается, что она принадлежит и остальным биссекторным плоскостям.

б) Центр вневписанной сферы, касающейся грани ABC, является точкой пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов при рёбрах AD, BD, CD и биссекторных плоскостей внешних двугранных углов при рёбрах AB, BC, CA. Пусть M — точка пересечения продолжения ребра CD с биссекторной плоскостью внешнего угла при ребре AB (если эта биссекторная плоскость параллельна ребру CD, то следует воспользоваться результатом задачи 18.23 (в)). Такие же рассуждения, как и при решении задачи 3.25, показывают, что $CM:MD=S_d:S_c$. Дальнейший ход решения такой же, как и в задаче (а).

18.27. Пусть X — произвольная точка, O — центр описанной сферы данного тетраэдра, $\boldsymbol{e}_i=\overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{XO}$. Если точка X имеет барицентрические координаты $(x_1:x_2:x_3:x_4)$, то $\sum x_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_i)=\sum x_i\overrightarrow{XA_i}=\overrightarrow{0}$, так как X — центр масс точек $A_1, \ldots, A_4$ с массами $x_1, \ldots, x_4$. Поэтому $(\sum x_i)\boldsymbol{a}=-\sum x_i\boldsymbol{e}_i$. Точка принадлежит описанной сфере тетраэдра тогда и только тогда, когда $|\boldsymbol{a}|=XO=R$, где R — радиус этой сферы. Таким образом, описанная сфера тетраэдра задаётся в барицентрических координатах уравнением $R^2(\sum x_i)^2 = (\sum x_i \boldsymbol{e}_i)^2$, т. е.

$$R^2 \sum x_i^2 + 2R^2 \sum_{i<j} x_i x_j = R^2 \sum x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j),$$

так как $|\boldsymbol{e}_i| = R$. Это уравнение переписывается в виде $\sum\limits_{i<j} x_i x_j (R^2 - (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)) = 0$. Заметим теперь, что $2(R^2 - (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)) = a_{ij}^2$, где a_{ij} — длина ребра A_iA_j. В самом деле, $a_{ij}^2 = |\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j|^2 = |\boldsymbol{e}_i|^2 + |\boldsymbol{e}_j|^2 - 2(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 2(R^2 - (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j))$. В итоге получаем, что описанная сфера тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ задаётся в барицентрических координатах уравнением $\sum\limits_{i<j} x_i x_j a_{ij}$, где a_{ij} — длина ребра A_iA_j.

18.28. а) Пусть S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади граней $A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$. Точки I_1, I_2, I_3 и I_4 имеют барицентрические координаты $(-S_1 : S_2 : S_3 : S_4)$, $(S_1 : -S_2 : S_3 : S_4)$, $(S_1 : S_2 : -S_3 : S_4)$ и $(S_1 : S_2 : S_3 : -S_4)$ (задача 18.26 (б)), а описанная сфера тетраэдра задаётся в барицентрических координатах уравнением $\sum\limits_{i<j} a_{ij}^2 x_i x_j = 0$, где a_{ij} — длина ребра A_iA_j (задача 18.27). Запишем условия принадлежности точек I_1 и I_2 описанной сфере (обозначая для краткости $a_{ij}^2 S_i S_j$ через y_{ij}): $y_{12} + y_{13} + y_{14} = y_{23} + y_{34} + y_{24}$ и $y_{12} + y_{23} + y_{24} = y_{13} + y_{34} + y_{14}$. Складывая эти равенства, получаем $y_{12} = y_{31}$. Аналогично, складывая такие равенства для точек I_i и I_j, получаем $y_{ij} = y_{kl}$, где набор чисел $\{i, j, k, l\}$ совпадает с $\{1, 2, 3, 4\}$.

Перемножая равенства $y_{13} = y_{23}$ и $y_{14} = y_{24}$, получаем $y_{13}y_{14} = y_{23}y_{24}$. Так как все числа S_i и a_{ij} положительны, то $S_1 a_{13} a_{14} = S_2 a_{23} a_{24}$, т. е. $\dfrac{a_{23}a_{24}}{S_1} = \dfrac{a_{13}a_{14}}{S_2}$. Домножив обе части последнего равенства на a_{34}, получим $\dfrac{a_{23}a_{24}a_{34}}{S_1} = \dfrac{a_{13}a_{14}a_{34}}{S_2}$. В каждой части этого равенства стоит отношение произведения длин сторон треугольника к его площади. Легко проверить, что такое отношение равно учетверённому радиусу описанной окружности треугольника. В самом деле, $S = \dfrac{1}{2} ab \sin\gamma = \dfrac{abc}{4R}$. Таким образом, радиусы описанных окружностей граней $A_2A_3A_4$ и $A_1A_3A_4$ равны. Аналогично доказывается, что радиусы всех граней тетраэдра равны. Остаётся воспользоваться результатом задачи 8.31 (в).

в) Воспользуемся обозначениями из предыдущей задачи. Для равногранного тетраэдра $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Поэтому условие принадлежности точки I_1 описанной сфере тетраэдра запишется в виде $a_{12} + a_{13} + a_{14} = a_{23} + a_{34} + a_{24}$. Это равенство следует из того, что $a_{12} = a_{34}$, $a_{13} = a_{24}$ и $a_{14} = a_{23}$. Принадлежность точек I_1, I_2, I_3 и I_4 описанной сфере проверяется аналогично.

Замечание. Утверждение задачи (б) доказано другим способом в решении задачи 8.39.

18.29. Пусть плоскость Π, проходящая через ребро CD, пересекает ребро AB в точке P, а плоскость Π', симметричная ей относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре CD, пересекает ребро AB в точке Q. Если $(\alpha : \beta : \gamma : \delta)$ — барицентрические координаты произвольной точки плоскости Π, а $(\alpha' : \beta' : \gamma' : \delta')$ — барицентрические координаты произвольной точки плоскости Π', то

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{BP}{PA} = \frac{V_{PBCD}}{V_{PACD}}, \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{BQ}{QA} = \frac{V_{QBCD}}{V_{QACD}}.$$

Воспользуемся формулой для объёма тетраэдра из задачи 3.3. Учитывая равенства двугранных углов, получаем

$$\frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'} = \frac{V_{PBCD}V_{QBCD}}{V_{PACD}V_{QACD}} = \frac{S_{PCD}S_{BCD}S_{QSD}S_{BCD}}{S_{PCD}S_{ACD}S_{QSD}S_{ACD}} = \frac{S_{BCD}^2}{S_{ACD}^2} = \frac{S_A^2}{S_B^2}.$$

Аналогичные равенства для других рёбер тетраэдра доказывают требуемое.

ГЛАВА 19

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Примеры и контрпримеры

19.1. а) Существует ли четырёхугольная пирамида, у которой две несмежные грани перпендикулярны плоскости основания?

б) Существует ли шестиугольная пирамида, у которой три (смежные или нет) боковые грани перпендикулярны плоскости основания?

19.2. Вершина E тетраэдра $ABCE$ расположена внутри тетраэдра $ABCD$. Обязательно ли сумма длин рёбер внешнего тетраэдра больше суммы длин рёбер внутреннего?

19.3. Из двух треугольных пирамид с общим основанием одна лежит внутри другой. Может ли быть сумма длин рёбер внутренней пирамиды больше суммы длин рёбер внешней?

19.4. Существует ли тетраэдр, все грани которого — тупоугольные треугольники?

19.5. Существует ли такой тетраэдр, что основания всех его высот лежат вне соответствующих граней?

19.6. В пирамиде $SABC$ ребро SC перпендикулярно основанию. Могут ли углы ASB и ACB быть равны?

19.7. Любой ли трёхгранный угол можно так пересечь плоскостью, что в сечении получится правильный треугольник?

19.8. Найдите плоские углы при вершинах трёхгранного угла, если известно, что любое его сечение является остроугольным треугольником.

19.9. Можно ли расположить в пространстве шесть попарно не параллельных прямых так, что все попарные углы между ними будут равны?

19.10. Обязательно ли является кубом многогранник, все грани которого — равные между собой квадраты?

19.11. Все рёбра многогранника равны и касаются одной сферы. Обязательно ли его вершины принадлежат одной сфере?

19.12. Можно ли в кубе вырезать отверстие, сквозь которое пройдёт куб того же размера?

19.13. Можно ли в тетраэдре вырезать отверстие, сквозь которое пройдёт тетраэдр того же размера?

19.14. Можно ли разместить в пространстве четыре шара и точечный источник света так, чтобы каждый исходящий из источника света луч пересекал хотя бы один из шаров?

19.15. Может ли конечное множество точек в пространстве, не лежащих в одной плоскости, обладать следующим свойством: для любых двух точек A и B из этого множества найдутся ещё две такие точки C и D из него, что $AB \parallel CD$ и эти прямые не совпадают?

19.16. Можно ли так расположить восемь непересекающихся тетраэдров, чтобы любые два из них соприкасались по участку поверхности с ненулевой площадью?

19.17. Любой выпуклый многогранник можно разрезать на тетраэдры, вершины которых расположены в вершинах многогранника (задача 19.44 (б)). Верно ли это утверждение для невыпуклого многогранника?

См. также задачи 7.11, 7.19, 13.3, 11.57 (б), 13.8 (б), 13.12, 14.21, 14.22, 14.23, 14.35, 14.36, 15.42 (б), 19.25, 19.27, 19.28, 19.45, 20.30.

§ 2. Целочисленные решётки

Множество точек пространства, все три координаты которых — целые числа, называют *целочисленной решёткой*, а сами эти точки — *узлами* целочисленной решётки. Плоскости, параллельные координатным плоскостям и проходящие через узлы целочисленной решётки, разбивают пространство на кубики с ребром 1.

19.18. Все вершины выпуклого многогранника находятся в узлах решётки, причём других узлов решётки внутри, на гранях и на рёбрах нет. Докажите, что число вершин многогранника не превосходит восьми.

19.19. а) При каких n существует правильный n-угольник с вершинами в узлах (пространственной) целочисленной решётки?

б) Какие правильные многогранники можно расположить так, чтобы их вершины были узлами целочисленной решётки?

19.20. Докажите, что если все вершины куба имеют целые координаты, то длина его ребра — целое число.

19.21. Существует ли правильный треугольник с целыми длинами сторон, вершины которого расположены в узлах целочисленной решётки?

19.22. Можно ли провести конечное число плоскостей в пространстве так, чтобы каждый кубик целочисленной решётки пересекала хотя бы одна из этих плоскостей?

19.23. Докажите, что наименьшая площадь S параллелограмма с вершинами в целочисленных точках плоскости $ax+by+cz=0$, где a, b и c — целые числа, равна наименьшей длине l вектора с целочисленными координатами, перпендикулярного этой плоскости.

19.24. Вершины A_1, B, C_1 и D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат в узлах целочисленной решётки. Докажите, что остальные его вершины тоже лежат в узлах целочисленной решётки.

* * *

Для многоугольников на плоскости с вершинами в узлах решётки имеет место формула Пика, позволяющая выразить его площадь через число точек внутри, на сторонах и в вершинах. Задача 19.25 показывает, что для многогранников в пространстве такой формулы быть не может. Но для параллелепипедов такая формула есть (задача 19.26).

19.25. Докажите, что объём тетраэдра, целочисленными точками которого являются лишь его вершины, может быть сколь угодно велик.

19.26. Дан параллелепипед (не обязательно прямоугольный) с вершинами в узлах целочисленной решётки, причём внутри него расположено a узлов решётки, внутри граней — b узлов, а внутри рёбер — c узлов. Докажите, что его объём равен $1+a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}$.

* * *

19.27. Докажите, что для любого натурального n существует сфера, внутри которой лежит ровно n точек целочисленной решётки.

19.28. Докажите, что для любого натурального n существует сфера, на которой лежит ровно n точек целочисленной решётки.

§ 3. Комбинаторика

19.29. На сколько частей разбивают пространство плоскости граней а) куба; б) тетраэдра?

19.30. На какое наибольшее число частей могут разделить сферу n окружностей?

19.31. В пространстве дано n плоскостей, причём любые три из них имеют ровно одну общую точку и никакие четыре не проходят через одну точку. Докажите, что они разбивают пространство на $(n^3 + 5n + 6)/6$ частей.

19.32. В пространстве заданы четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько имеется различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами?

19.33. а) Выбраны шесть цветов, и требуется раскрасить шесть граней куба в разные цвета. Сколькими различными способами можно это сделать? (Различными считаются те раскраски, которые нельзя совместить одну с другой при помощи вращений куба вокруг его центра.)

б) Сколькими различными способами можно раскрасить грани додекаэдра в двенадцать цветов?

19.34. Сколькими способами можно провести плоскость так, чтобы она высекла на данном додекаэдре правильный шестиугольник?

§ 4. Системы точек и фигур

19.35. В пространстве расположены k проволочных треугольников так, что каждые два из них имеют ровно одну общую вершину и в каждой вершине сходится ровно p треугольников. Найдите все значения k и p, при которых указанное расположение возможно.

19.36. Поместите в полый куб с ребром a три цилиндра диаметра $\frac{a}{2}$ и высоты a так, чтобы они не могли менять своего положения внутри куба.

См. также задачу 12.3.

§ 5. Разрезания

19.37. а) Разрежьте тетраэдр с ребром $2a$ на тетраэдры и октаэдры с ребром a.

б) Разрежьте октаэдр с ребром $2a$ на тетраэдры и октаэдры с ребром a.

19.38. Докажите, что пространство можно заполнить правильными тетраэдрами и октаэдрами (без промежутков).

19.39. Разрежьте куб на три равные пирамиды.

19.40. На какое наименьшее число непересекающихся тетраэдров можно разрезать куб?

19.41. Докажите, что любой тетраэдр можно разрезать плоскостью на две части так, что из них можно вновь сложить такой же тетраэдр, приложив их друг к другу иным способом.

19.42. В пространстве дано n $(n \geqslant 5)$ плоскостей, причём любые три из них имеют ровно одну общую точку и никакие четыре не проходят через одну точку, Докажите, что среди частей, на которые эти плоскости разбивают пространство, найдётся не менее $\frac{2n-3}{4}$ тетраэдров.

* * *

19.43. Докажите, что любой многогранник можно разрезать на выпуклые многогранники.

19.44. а) Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разрезать на тетраэдры.

б) Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разрезать на тетраэдры, вершины которых расположены в вершинах многогранника.

Разбиение выпуклого многогранника на тетраэдры, вершины которых расположены в вершинах многогранника, назовём *триангуляцией без дополнительных вершин*. Такое разбиение всегда существует согласно задаче 19.44 (б).

19.45. Будет ли число тетраэдров в триангуляции без дополнительных вершин одним и тем же для разных триангуляций одного и того же многогранника?

19.46. Докажите, что у любого выпуклого многогранника с n вершинами есть триангуляция без дополнительных вершин, содержащая не более $2n-7$ тетраэдров.

См. также задачи 4.36, 17.9.

§ 6. Раскраски

19.47. Камень имеет форму правильного тетраэдра. Его перекатывают по плоскости, переворачивая через ребро. После нескольких таких переворачиваний камень вернулся на исходное место. Могут ли при этом его грани поменяться местами?

19.48. Прямоугольный параллелепипед размером $2l \times 2m \times 2n$ разрезан на кубики со стороной 1, и каждый из этих кубиков окрашен в один из 8 цветов, причём любые два кубика, имеющие хотя бы одну общую вершину, окрашены в разные цвета. Докажите, что все угловые кубики окрашены в разные цвета.

Решения

19.1. Ответ: да, такие пирамиды существуют. В качестве их оснований можно взять, например, четырёхугольник и невыпуклый шестиугольник, изображённые на рис. 19.1; вершины этих пирамид лежат на перпендикулярах, восставленных из точек P и Q соответственно.

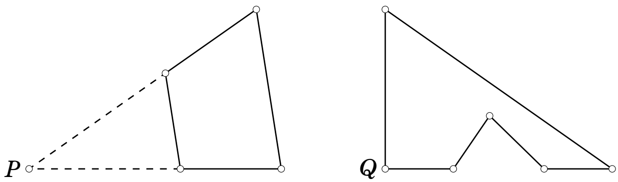


Рис. 19.1

19.2. Ответ: нет, не обязательно. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, основание AC которого много меньше боковой стороны. Вершину D поместим вблизи середины стороны AC, а вершину E — внутри тетраэдра $ABCD$ и вблизи вершины B. Периметр внешнего тетраэдра можно сделать сколь угодно близким к $3a$, где a — длина боковой стороны треугольника ABC, а периметр внутреннего — к $4a$.

19.3. Ответ: да, может. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду с основанием BCD и вершиной A. Пусть длина стороны основания равна ε, а длина бокового ребра равна 1. Возьмём на стороне AD точку D' так, что $AD' = \varepsilon$. Если ε мало, то сумма длин рёбер пирамиды $ABCD$ близка к 3, а сумма длин рёбер пирамиды $ABCD'$ близка к 4.

Замечание. Согласно задаче 11.57 (а) отношение суммы длин рёбер внутренней пирамиды к сумме длин рёбер внешней пирамиды не превосходит $\frac{4}{3}$.

19.4. Ответ: да, существует. Пусть в треугольнике ABC угол C тупой, а точка D лежит на высоте, опущенной из вершины C. Слегка приподняв точку D над плоскостью ABC, получим требуемый тетраэдр.

19.5. Ответ: да, существует. Этим свойством обладает тетраэдр, у которого два противоположных двугранных угла тупые. Для построения такого тетраэдра можно, например, взять две диагонали квадрата и чуть-чуть приподнять одну над другой.

З а м е ч а н и е. Основание наименьшей высоты любого тетраэдра попадает внутрь треугольника, стороны которого проходят через вершины противолежащей грани параллельно её рёбрам (см. задачу 2.8).

19.6. О т в е т: да, могут. Пусть точки C и S лежат на одной дуге окружности, проходящей через A и B, причём $SC \perp AB$ и точка C ближе к прямой AB, чем точка S (рис. 19.2). Тогда треугольник ABS можно так повернуть вокруг оси AB, что отрезок SC станет перпендикулярен плоскости ABC.

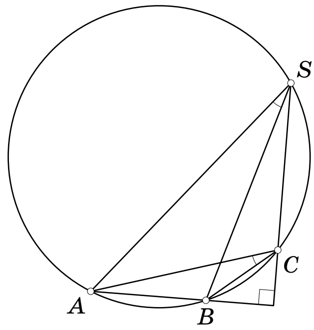


Рис. 19.2

19.7. О т в е т: нет, не любой. Рассмотрим трёхгранный угол $SABC$, у которого $\angle BSC < 60^\circ$ и ребро AS перпендикулярно грани SBC. Предположим, что его сечение ABC является правильным треугольником. В прямоугольных треугольниках ABS и ACS равны гипотенузы, поэтому $SB = SC$. В равнобедренном треугольнике SBC угол при вершине S наименьший, поэтому $BC < SB$. Ясно также, что $SB < AB$, а значит, $BC < AB$. Получено противоречие.

19.8. О т в е т: все плоские углы прямые. Докажем сначала, что любое сечение трёхгранного угла с прямыми плоскими углами является остроугольным треугольником. Пусть секущая плоскость отсекает от рёбер отрезки длиной a, b и c. Тогда квадраты длин сторон сечения равны $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$ и $a^2 + c^2$. Сумма квадратов любых двух сторон больше квадрата третьей, поэтому треугольник остроугольный.

Докажем теперь, что если не все плоские углы трёхгранного угла с вершиной S прямые, то у него есть сечение — тупоугольный треугольник. Если в трёхгранном угле есть тупой плоский угол, то отложим на его сторонах равные отрезки SA и SB; если точка C на третьем ребре взята достаточно близко к вершине S, то треугольник ABC тупоугольный. Если же в трёхгранном угле есть острый плоский угол, то на его сторонах можно так выбрать точки A и B, что угол SAB тупой; если точка C на третьем ребре взята достаточно близко к вершине S, то треугольник ABC тупоугольный.

19.9. О т в е т: да, можно. Проведём прямые, соединяющие центр икосаэдра с его вершинами (см. задачу 14.4). Легко проверить, что любые две такие прямые проходят через две точки, являющиеся концами одного ребра.

19.10. О т в е т: нет, не обязательно. Возьмём куб и приложим к каждой из его граней по такому же кубу. У полученного (невыпуклого) многогранника все грани являются равными между собой квадратами.

19.11. О т в е т: нет, не обязательно. Построим внешним образом на гранях куба как основаниях правильные четырёхугольные пирамиды с двугранными углами при основании, равными 45°. В результате получим 12-гранник, имеющий 14 вершин, причём восемь из них — вершины куба, а шесть — вершины построенных пирамид; рёбра куба являются диагоналями его граней, а поэтому его рёбрами не являются.

Все рёбра этого многогранника равны, и они равноудалены от центра куба. Одной сфере его вершины принадлежать не могут, так как вершины куба удалены от центра на расстояние $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, где a — ребро куба, а остальные вершины удалены от центра куба на расстояние a.

19.12. Ответ: можно. Проекцией куба с ребром a на плоскость, перпендикулярную диагонали, является правильный шестиугольник со стороной $b = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (длина малой диагонали этого шестиугольника равна длине диагонали грани куба, т. е. равна $a\sqrt{2}$). Впишем в полученный шестиугольник квадрат так, как показано на рис. 19.3. Легко проверить, что сторона этого квадрата равна $\frac{2\sqrt{3}b}{1+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}a}{1+\sqrt{3}} > a$, а значит, он содержит внутри себя квадрат K со стороной a. Вырезав часть куба, проецирующуюся в K, получим требуемый вырез.

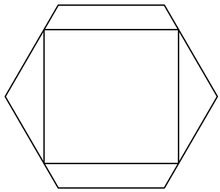


Рис. 19.3

19.13. Ответ: можно. Достаточно доказать, что тетраэдр $ABCD$ можно повернуть в пространстве так, что его проекция на плоскость ABC попадёт строго внутрь треугольника ABC (вырезав эту проекцию, мы получим требуемое). Сначала повернём тетраэдр вокруг оси AB так, чтобы проекция вершины D на плоскость ABC попала на AB. Затем чуть-чуть повернём тетраэдр вокруг прямой, соединяющей середину ребра AB и ребра CD (в новом положении). Проекция полученного тетраэдра на исходную плоскость ABC представляет собой трапецию, одно основание которой лежит на стороне AB (причём вершины основания отличны от A и B), а в остальном эта трапеция лежит строго внутри треугольника ABC. Такую проекцию можно параллельно сдвинуть внутрь треугольника ABC.

19.14. Ответ: да, можно. Пусть источник света находится в центре O правильного тетраэдра $ABCD$. Рассмотрим трёхгранный угол, образованный лучами OA, OB и OC. Построим шар, пересекающий лучи OA, OB и OC и не содержащий точки O. Такой шар, как легко видеть, существует: можно, например, взять шар, касающийся лучей OA, OB и OC, и слегка его увеличить (или приблизить к O). Этот шар, очевидно, закроет весь трёхгранный угол $OABC$. Другим шаром закроем угол $OABD$. Если второй шар пересекается с первым, то, отодвигая его центр по лучу OP, где P — центр второго шара, и соответственно увеличивая его радиус, всегда можно добиться того, чтобы второй шар не пересекался с первым. Затем точно так же построим шар, закрывающий трёхгранный угол $OACD$ и не пересекающийся с двумя первыми шарами, и шар, закрывающий трёхгранный угол $OBCD$.

19.15. Ответ: да, может. Легко проверить, что вершины правильного шестиугольника обладают требуемым свойством. Рассмотрим теперь два правильных шестиугольника с общим центром O, лежащие в разных плоскостях. Если A и B — вершины разных шестиугольников, то в качестве C и D можно взять точки, симметричные A и B относительно точки O.

19.16. Ответ: можно. На рис. 19.4 сплошной линией изображены четыре треугольника (один лежит внутри трёх других). Рассмотрим четыре треугольные пирамиды с общей вершиной, основаниями которых служат эти треугольники. Аналогично строятся ещё четыре треугольные пирамиды с общей вершиной (лежащей по другую сторону от плоскости рисунка), основаниями которых служат треугольники, изображённые пунктиром. Полученные восемь тетраэдров обладают требуемым свойством.

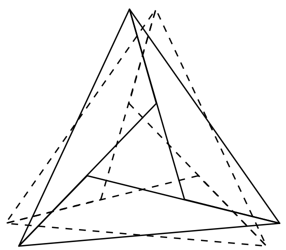


Рис. 19.4

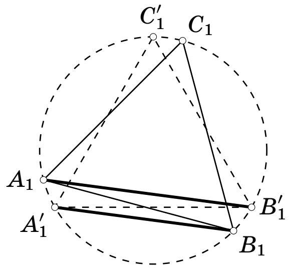


Рис. 19.5

19.17. Ответ: нет. Возьмём правильную треугольную призму с основаниями ABC и $A_1'B_1'C_1'$. Повернём треугольник $A_1'B_1'C_1'$ относительно его центра на небольшой угол (оставаясь при этом в той же плоскости); в результате он перейдёт в треугольник $A_1B_1C_1$. При этом отрезки AB_1 и BA_1 не будут пересекаться; действительно, при проекции на плоскость $A_1B_1C_1$ эти отрезки переходят в параллельные отрезки $A_1'B_1$ и $B_1'A_1$ (рис. 19.5). Рассмотрим выпуклую оболочку треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ и отрежем от полученного выпуклого многоугольника тетраэдры ABA_1B_1, BCB_1C_1 и CAC_1A_1. Возвращаясь к рис. 19.5, мы видим, что при этом будет отрезаны «внешние» ребра AB_1, BC_1 и CA_1 (рис. 19.6).

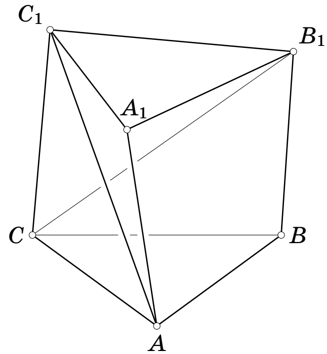


Рис. 19.6

Полученный в результате многогранник не содержит целиком вообще ни одного тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, A_1, B_1, C_1. Действительно, разобьём эти точки на три пары (A, B_1), (B, C_1), (C, A_1). Все четыре вершины тетраэдра не могут лежать в разных парах, поэтому любой тетраэдр с вершинами в данных точках содержит две вершины из одной пары. Но эти две вершины соединены отрезанным ребром, поэтому тетраэдр не весь лежит в рассматриваемом многограннике.

Замечание. Первый пример многогранника, который нельзя разрезать на тетраэдры, вершины которых расположены в вершинах исходного многогранника, построил американский математик Н. Леннес в 1911 г. В связи с этим такие многогранники часто называют *многогранниками Леннеса*. Приведённый выше пример многогранника Леннеса предложил немецкий математик Э. Шёнхардт (1928).

19.18. Каждая из трёх координат узла решётки может быть либо чётной, либо нечётной; всего получается $2^3 = 8$ различных вариантов. Поэтому если у многогранника есть девять вершин, расположенных в узлах решётки, то две из них имеют координаты одной чётности. Середина отрезка, соединяющего эти вершины, является узлом решётки.

19.19. а) Докажем сначала, что при $n = 3, 4, 6$ существует правильный n-угольник с вершинами в узлах целочисленной решётки. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вершины которого имеют координаты $(\pm1, \pm1, \pm1)$. Тогда середины рёбер AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1 и A_1A являются вершинами правильного шестиугольника и все они имеют целочисленные координаты (рис. 19.7); середины рёбер AB, CC_1 и D_1A_1 являются вершинами правильного треугольника; ясно также, что $ABCD$ — квадрат с целочисленными вершинами.

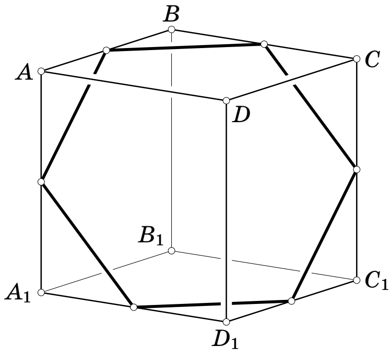


Рис. 19.7

Докажем теперь, что при $n \neq 3, 4, 6$ не существует правильного n-угольника с вершинами в узлах целочисленной решётки. Предположим, что такой n-угольник существует при некотором $n \neq 3, 4, 6$. Среди всех n-угольников с вершинами в узлах решётки можно выбрать тот, у которого длина стороны наименьшая. Действительно, длина стороны такого n-угольника может принимать лишь конечное число значений, меньших данного, поскольку длина любого отрезка с концами в узлах решётки равна $\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$, где n_1, n_2 и n_3 — целые числа.

Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — выбранный n-угольник с наименьшей длиной стороны. Рассмотрим правильный n-угольник $B_1B_2 \ldots B_n$, где точка B_i получается из точки A_i переносом на вектор $\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$, т. е. $\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$. Так как при переносе на вектор с целочисленными координатами узел решётки переходит в узел решётки, B_i является узлом решётки. Для того чтобы получить противоречие, остаётся доказать, что длина стороны многоугольника $B_1B_2 \ldots B_n$ строго меньше длины стороны многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ (и не равна нулю). Доказательство этого достаточно очевидно; нужно только разобрать отдельно два случая: $n = 5$ и $n \geqslant 7$.

б) Докажем сначала, что куб, правильный тетраэдр и октаэдр можно расположить требуемым образом. Рассмотрим для этого куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вершины которого имеют координаты $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Тогда AB_1CD_1 — требуемый тетраэдр, а середины граней рассматриваемого куба являются вершинами требуемого октаэдра.

Докажем теперь, что додекаэдр и икосаэдр нельзя расположить требуемым образом. Как следует из предыдущей задачи, не существует правильного пятиугольника с вершинами в узлах решётки. Остаётся проверить, что и у додекаэдра, и у икосаэдра найдётся набор вершин, задающих правильный пятиугольник. Для додекаэдра это вершины одной из граней, а для икосаэдра это концы выходящих из одной вершины рёбер.

19.20. Пусть a — длина ребра данного куба. Число a^2 является суммой квадратов трёх целых чисел, поэтому оно целое. Кроме того, формула из задачи 11.40 показывает, что число a^3 (объём куба) тоже целое. Поэтому $a = \dfrac{a^3}{a^2}$ — рациональное число, квадрат которого — целое число. Следовательно, число a целое.

19.21. Ответ: нет. Предположим, что вершины правильного треугольника ABC расположены в узлах целочисленной решётки, причём длины его сторон равны целому числу m. Можно считать, что вершина C расположена в начале координат; пусть тогда вершины A и B имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3). Без ограничения общности можно считать, что числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 не имеют общего делителя; в частности, по крайней мере одно из них нечётно. По условию

$$m^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2.$$

Следовательно,

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = 2(m^2 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3),$$

т. е. $m^2 = 2(m^2 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)$. Следовательно, число m чётно, т. е. числа $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ и $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ делятся на 4. Но в случае, когда среди чисел a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 есть хотя бы одно нечётное, это невозможно. Приходим к противоречию.

19.22. Ответ: нельзя. Пусть в пространстве задано n плоскостей. Если кубик решётки пересекается с некоторой плоскостью, то он целиком лежит внутри полосы шириной $2\sqrt{3}$, состоящей из всех точек, удалённых от данной плоскости не более чем на $\sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ — наибольшее расстояние между точками кубика). Рассмотрим шар радиуса R. Если все кубики решётки, имеющие общие точки с этим шаром, пересекаются с данными плоскостями, то полосы шириной $2\sqrt{3}$, определяемые данными плоскостями, заполняют весь шар. Объём части каждой такой полосы, лежащей внутри шара, не превосходит $2\sqrt{3}\pi R^2$. Так как объём шара не превосходит суммы объёмов полос, то $\dfrac{4\pi R^3}{3} \leqslant 2\sqrt{3}n\pi R^2$, т. е. $R \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}n$. Следовательно, если $R > \dfrac{3\sqrt{3}}{2}n$, то n плоскостей не могут пересекать все кубики решётки, имеющие общие точки с шаром радиуса R.

19.23. Можно считать, что числа a, b и c в совокупности взаимно просты, т. е. наибольшее число, на которое все они делятся, равно 1. Вектор, перпендикулярный данной плоскости, имеет координаты $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$; эти координаты целые тогда и только тогда, когда число λ целое, поэтому l — длина вектора (a, b, c). Если $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — векторы соседних сторон параллелограмма с вершинами в целочисленных точках данной плоскости, то их векторное произведение является вектором с целочисленными координатами, перпендикулярным данной плоскости, причём длина этого вектора равна площади рассматриваемого параллелограмма, Следовательно, $S \geqslant l$.

Докажем теперь, что $S \leqslant l$. Для этого достаточно указать целочисленные векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, лежащие в данной плоскости, векторное произведение которых имеет координаты (a, b, c). Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b; $a' = \dfrac{a}{d}$ и $b' = \dfrac{b}{d}$. В качестве $\boldsymbol{u}$ возьмём вектор $(-b', a', 0)$. Если $\boldsymbol{v} = (x, y, z)$, то $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = (a'z, b'z, -a'x - b'y)$. Поэтому в качестве z нужно взять d, а числа x и y подобрать так, чтобы выполнялось равенство $ax + by + cz = 0$, т. е. $-a'x - b'y = c$.

Остаётся доказать, что если числа p и q взаимно просты, то существуют такие целые числа x и y, что $px + qy = 1$; тогда $px' + qy' = c$ для $x' = cx$ и $y' = cy$. Можно считать, что $p > q > 0$. Будем последовательно производить деления с остатком:

$$p = qn_0 + r_1, \quad q = r_1 n_1 + r_2,$$
$$r_1 = r_2 n_2 + r_3, \quad \ldots, \quad r_{k-1} = r_k n_k + r_{k+1}, \quad r_k = n_{k+1} r_{k+1}.$$

Так как числа p и q взаимно просты, то q и r_1 тоже взаимно просты, а значит, r_1 и r_2 взаимно просты и т. д. Поэтому r_k и r_{k+1} взаимно просты, т. е. $r_{k+1} = 1$. Подставим в формулу $r_{k-1} = r_k n_k + 1$ значение r_k, полученное из предыдущей формулы $r_{k-2} = r_{k-1} n_{k-1} + r_k$; затем подставим значение r_{k-1}, полученное из формулы $r_{k-3} = r_{k-2} n_{k-2} + r_{k-1}$, и т. д. На каждом шаге получаются соотношения вида $xr_i + yr_{i-1} = 1$, поэтому в конце получится требуемое соотношение.

19.24. Пусть (x_i, y_i, z_i) — координаты i-й вершины правильного тетраэдра A_1BC_1D. Его центр, совпадающий с центром куба, имеет первую координату $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ и т. д. Точка, симметричная точке (x_1, y_1, z_1) относительно центра куба, имеет первую координату

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} - x_1 = \frac{-x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} \quad \text{и т. д.}$$

Чётность числа $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ совпадает с чётностью числа $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Итак, нужно доказать, что числа $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ и т. д. чётные. Будем считать, что начало координат находится в четвёртой вершине тетраэдра, т. е. $x_4 = y_4 = z_4 = 0$.

Пусть u, v, w — целые числа. Легко проверить, что если число $u^2 + v^2 + w^2$ делится на 4, то все числа u, v и w чётные. Поэтому достаточно проверить, что число $u^2 + v^2 + w^2$, где $u = x_1 + x_2 + x_3$, $v = y_1 + y_2 + y_3$ и $w = z_1 + z_2 + z_3$, — чётное. Пусть a — ребро куба. Так как $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2a^2$ и $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 =$

$= (\sqrt{2}a)^2 \cos 60^\circ = a^2$, то $u^2 + v^2 + w^2 = 6a^2 + 6a^2 = 12a^2$. Число a^2 целое, потому что оно является суммой квадратов трёх целочисленных координат.

19.25. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с целочисленными вершинами, рёбра которого параллельны осям координат и их длины равны 1, 1 и n. Целочисленными точками тетраэдра A_1BC_1D являются лишь его вершины, а его объём равен $\frac{n}{3}$.

19.26. Можно считать, что одна из вершин данного параллелепипеда находится в начале координат. Рассмотрим куб K_1, абсолютные величины координат точек которого не превосходят некоторого целого числа n. Разобьём пространство на параллелепипеды, равные данному, проведя плоскости, параллельные его граням. Соседние параллелепипеды получаются друг из друга переносом на целочисленный вектор, поэтому все эти параллелепипеды имеют целочисленные вершины. Пусть N — число наших параллелепипедов, имеющих общие точки с кубом K_1. Все они расположены внутри куба K_2, абсолютные величины координат точек которого не превосходят $n + d$, где d — наибольшее расстояние между вершинами данного параллелепипеда.

Обозначим объём данного параллелепипеда через V. Так как рассматриваемые N параллелепипедов содержат куб K_1 и содержатся в кубе K_2, то $(2n)^3 \leqslant NV \leqslant (2n + 2d)^3$, т. е.

$$\left(\frac{1}{2n + 2d}\right)^3 \leqslant \frac{1}{NV} \leqslant \left(\frac{1}{2n}\right)^3. \qquad (1)$$

Для каждого из рассматриваемых N параллелепипедов напишем рядом с его целочисленными точками следующие числа: рядом с внутренней точкой — число 1, рядом с точкой грани — число $\frac{1}{2}$, рядом с точкой ребра — число $\frac{1}{4}$, а рядом с вершиной — число $\frac{1}{8}$ (в итоге рядом с точками, принадлежащими нескольким параллелепипедам, будет написано несколько чисел). Легко проверить, что сумма чисел, стоящих рядом с каждой целочисленной точкой куба K_1, равна 1 (нужно учесть, что каждая точка грани принадлежит двум параллелепипедам, точка ребра — четырём, а вершина — восьми); для целочисленных точек внутри куба K_2 такая сумма не превосходит 1, а для точек вне K_2 таких чисел нет. Поэтому сумма всех рассматриваемых чисел заключена между количествами целочисленных точек кубов K_1 и K_2. С другой стороны, она равна $N\left(1 + a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}\right)$. Поэтому

$$(2n + 1)^3 \leqslant N\left(1 + a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}\right) \leqslant (2n + 2d + 1)^3. \qquad (2)$$

Перемножая неравенства (1) и (2), получаем, что для любого натурального n справедливы неравенства

$$\left(\frac{2n + 1}{2n + 2d}\right)^3 \leqslant \frac{1 + a + b/2 + c/4}{V} \leqslant \left(\frac{2n + 2d + 1}{2n}\right)^3.$$

Так как при n, стремящемся к бесконечности, и верхняя, и нижняя оценки стремятся к 1, то $1 + a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} = V$.

19.27. Докажем сначала, что на сфере с центром $A = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}\right)$ не может быть более одной точки целочисленной решётки. Действительно, если

$$(x_1 - \sqrt{2})^2 + (y_1 - \sqrt{3})^2 + \left(z_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = (x_2 - \sqrt{2})^2 + (y_2 - \sqrt{3})^2 + \left(z_2 - \frac{1}{3}\right)^2, \qquad (1)$$

где числа $x_1, \ldots, z_2$ целые, то

$$(x_1 - x_2)\sqrt{2} + (y_1 - y_2)\sqrt{3} = r,$$

где число r рациональное. Покажем, что в таком случае $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Для этого достаточно доказать, что если для некоторых целых чисел m, n и l выполняется равенство $m\sqrt{2} + n\sqrt{3} + l = 0$, то $m = n = l = 0$. Возведём в квадрат обе части равенства $-m\sqrt{2} = n\sqrt{3} + l$. В результате получим $2m^2 = 3n^2 + l^2 + 2nl\sqrt{3}$. Это равенство может выполняться лишь в том случае, когда $nl = 0$, т. е. $n = 0$ или $l = 0$, но тогда $m = n = l = 0$. Таким образом, если выполняется соотношение (1), то $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Остаётся заметить, что уравнение $\left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = c$ не может иметь более одного целого корня, поскольку для его корней по теореме Виета выполняется соотношение $z_1 + z_2 = \frac{2}{3}$.

Запишем радиусы сфер с центром $A = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}\right)$, проходящих через точки целочисленной решётки, в порядке возрастания: $R_1 < R_2 < R_3 < \ldots$ Если $R_n < R < R_{n+1}$, то внутри сферы радиуса R с центром A содержится ровно n точек целочисленной решётки.

19.28. Напомним аналогичный факт из планиметрии: для любого натурального n существует окружность, на которой лежит ровно n точек целочисленной решётки; более того, можно считать, что уравнение этой окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$, где числа a, b и c рациональные (задача 24.13 из книги «Задачи по планиметрии»). Докажем, что тогда на сфере

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - \sqrt{2})^2 = c + 2$$

лежит ровно n точек целочисленной решётки. Уравнение этой сферы можно переписать в виде

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 - c = -2z\sqrt{2}.$$

Если точка (x, y, z) с целыми координатами удовлетворяет этому уравнению, то для неё выражение в левой части всегда рационально, а выражение в правой части будет рациональным лишь при $z = 0$. Поэтому точка (x, y, z) с целыми координатами лежит на данной сфере тогда и только тогда, когда она имеет вид $(x, y, 0)$, где $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$. Таких точек ровно n.

19.29. Ответ: а) на 27; б) на 15. Плоскости граней обоих многогранников пересекаются только по прямым, содержащим их рёбра. Поэтому каждая из частей, на которые разбито пространство, имеет общие точки с многогранником. Более того, каждой вершине, каждому ребру и каждой грани можно сопоставить ровно одну прилегающую к ней часть, причём этим будут исчерпаны все части, кроме самого многогранника. Таким образом, требуемое число равно $1 + \text{В} + \text{Р} + \text{Г}$. Для куба оно равно $1 + 8 + 6 + 12 = 27$, а для тетраэдра $1 + 4 + 4 + 6 = 15$.

19.30. Ответ: на n^2-n+2. Обозначим требуемое число через S_n. Ясно, что $S_1=2$. Выразим теперь S_{n+1} через S_n. Рассмотрим набор из $n+1$ окружностей на сфере и выделим среди них одну окружность. Пусть остальные окружности делят сферу на s_n частей ($s_n \leqslant S_n$), а число частей, на которые они делят выделенную окружность, равно k. Так как k равно числу точек пересечения выделенной окружности с остальными n окружностями, а любые две окружности имеют не более двух точек пересечения, то $k\leqslant 2n$. Каждая из частей, на которые разделена выделенная окружность, делит на две части не более чем одну из ранее полученных частей сферы. Поэтому рассматриваемые $n+1$ окружностей делят сферу на не более чем $s_n+k\leqslant S_n+2n$ частей, причём равенство достигается, когда любые две окружности имеют две общие точки и никакие три окружности не проходят через одну точку. Следовательно, $S_{n+1}=S_n+2n$, а значит,

$$S_n = S_{n-1}+2(n-1) = S_{n-2}+2(n-2)+2(n-1) = \ldots$$
$$\ldots = S_1+2+4+\ldots+2(n-1) = 2+n(n-1) = n^2-n+2.$$

19.31. Докажем сначала, что n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, разбивают плоскость на $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ частей. Доказательство проведём индукцией по n. Для $n=0$ утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для n прямых, и докажем его для $n+1$ прямых. Выделим среди них одну прямую. Остальные прямые делят её на $n+1$ частей. Каждая из них делит на две части какую-либо из тех частей, на которые делят плоскость n прямых. Поэтому после проведения одной прямой число частей увеличилось на $n+1$. Остаётся заметить, что

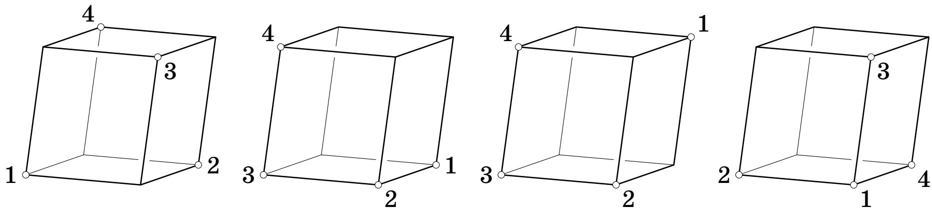
$$\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}+n+1.$$

Для плоскостей доказательство проводится почти так же, как и для прямых. Нужно лишь воспользоваться тем, что n плоскостей пересекают выделенную плоскость по n прямым, поэтому они разбивают её на $\dfrac{n^2+n+1}{2}$ частей. Для $n=0$ утверждение очевидно; равенство

$$\frac{(n+1)^2+5(n+1)+6}{6} = \frac{n^2+5n+6}{6}+\frac{n^2+n+2}{6}$$

проверяется простыми вычислениями.

19.32. Ответ: 29. Рассмотрим параллелепипед, для которого данные точки служат вершинами, и отметим его рёбра, соединяющие данные точки. Пусть n — наибольшее число отмеченных рёбер этого параллелепипеда, выходящих из одной вершины; число n может изменяться от 0 до 3. Несложный перебор показывает, что возможны лишь варианты, изображённые на рис. 19.8. Вычислим количество параллелепипедов для каждого из этих вариантов. Первой может быть любая из четырёх точек, второй — любая из трёх оставшихся и т. д., т. е. 4 точки можно занумеровать 24 различными способами. После нумерации данных точек параллелепипед в каждом случае восста-



а) $n=0$ б) $n=2$ в) $n=2$ г) $n=3$

Рис. 19.8

навливается однозначно, поэтому нужно выяснить, какие нумерации приводят к одному и тому же параллелепипеду.

а) Параллелепипед в случае (а) не зависит от нумерации.

б) Нумерации 1, 2, 3, 4 и 4, 3, 2, 1 приводят к одному и тому же параллелепипеду, т. е. всего имеется 12 различных параллелепипедов.

в) Нумерации 1, 2, 3, 4 и 1, 4, 3, 2 приводят к одному и тому же параллелепипеду, т. е. всего имеется 12 различных параллелепипедов.

г) Параллелепипед зависит только от выбора первой точки, т. е. всего имеется четыре различных параллелепипеда.

В итоге получаем, что всего имеется $1+12+12+4=29$ различных параллелепипедов.

19.33. а) Ответ: 30 способами. Куб можно повернуть так, чтобы грань, окрашенная первым цветом, заняла заданное положение. Для окраски противоположной ей грани есть пять различных вариантов; разные раскраски противоположной грани дают различные раскраски куба.

Среди оставшихся четырёх граней можно выбрать грань, окрашенную данным цветом, и перевести её в данное положение (не меняя при этом положение первых двух граней). Разные раскраски трёх оставшихся граней дают различные раскраски куба. Одну из этих граней можно окрасить тремя способами, одну из оставшихся — двумя. Всего получаем $5\cdot 3\cdot 2=30$ различных раскрасок.

б) Ответ: 7 983 360 способами. Количество всех возможных раскрасок додекаэдра равно $12!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 12$. Чтобы найти число различных раскрасок, нужно поделить $12!$ на число самосовмещений додекаэдра. Любую из 12 граней можно перевести в любую другую. Кроме того, есть пять поворотов (включая тождественный), сохраняющих данную грань. Всего получается 60 самосовмещений. Поэтому количество различных раскрасок додекаэдра равно $\frac{12!}{60}=7\,983\,360$.

19.34. Ответ: на 30 частей. Пусть a_n — наибольшее число частей, на которые разбивают сферу n окружностей, b_n — наибольшее число частей, на которые разбивают пространство n сфер. Ясно, что $a_2=2$ и $b_2=2$. Покажем, что $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ и $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$. Прежде всего заметим, что число частей будет наибольшим в том случае, когда никакие три окружности не пересекаются в одной точке и, соответственно, никакие четыре сферы не пересекаются в одной точке и никакие три сферы не имеют общей окружности. Действительно, иначе число частей всегда можно увеличить, слегка пошевелив окружности (сферы). Пусть на сфере дано n окружностей, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Фиксируем одну из них. Оставшиеся окружности разбивают сферу не более чем на a_{n-1} частей, причём возможна конфигурация, когда они разбивают сферу на a_{n-1} частей. Фиксированная окружность пересекает остальные окружности не более чем в $2n-2$ точках, причём случай, когда число точек пересечения равно $2n-2$, возможен. Точки пересечения разбивают фиксированную окружность на $2n-2$ частей; каждая их этих частей окружности добавляет одну новую часть разбиения сферы. Поэтому $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$. Равенство $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$ доказывается аналогично. Таким образом,

$$a_2 = 4, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 14, \quad \text{и} \quad b_2 = 4, \quad b_3 = 8, \quad b_4 = 16, \quad b_5 = 30.$$

З а м е ч а н и е. Несложно доказать общие формулы

$$a_n = n^2 - n + 2 \quad \text{и} \quad b_n = \frac{n^3 + 8n}{3} - n^2.$$

19.35. О т в е т: $(k, p) = (1, 1)$, $(4, 2)$ или $(7, 3)$.

Сначала докажем, что $p \leqslant 3$. Предположим, что $p \geqslant 4$. Возьмём треугольник Δ_1. К его вершине A примыкает треугольник Δ_2. К вершине $B \neq A$ треугольника Δ_2 примыкают треугольники Δ_3, Δ_4, Δ_5; все они отличны от Δ_1, поскольку иначе треугольники Δ_1 и Δ_2 имели бы две общие вершины. По условию каждый из треугольников Δ_3, Δ_4, Δ_5 имеет общую вершину с треугольником Δ_1, причём эта вершина отлична от A. Но из этого следует, что два из треугольников Δ_3, Δ_4, Δ_5 имеют общую вершину, отличную от B.

Если $p = 1$, то $k = 1$ (если бы было хотя бы два треугольника, то они имели бы общую вершину, а тогда $p \geqslant 2$).

Пусть в каждой вершине сходятся $p \geqslant 2$ треугольников. Фиксируем один из треугольников. К каждой его вершине примыкает $p-1$ треугольников, т. е. всего к нему примыкает $3(p-1)$ треугольников. Все эти треугольники различны, и других треугольников нет, поскольку любые два треугольника должны иметь общую вершину. Значит, всего получаем $3(p-1) + 1 = 3p - 2$ треугольников.

Чтобы построить конфигурацию, для которой $(k, p) = (4, 2)$, можно взять октаэдр и выбросить половину его граней, оставив только треугольники, не имеющие общих сторон. Чтобы построить конфигурацию, для которой $(k, p) = (7, 3)$, можно взять тетраэдр, поместить внутрь его треугольник ABC и для каждой вершины треугольника ABC взять треугольник, образованный этой вершиной и одним из двух несмежных рёбер тетраэдра (для каждой вершины треугольника ABC берётся своя пара несмежных рёбер тетраэдра).

19.36. Если основания цилиндра лежат на гранях куба, то направление оси цилиндра будет неизменным при всех его перемещениях внутри куба. Поместим теперь в куб два цилиндра так, чтобы их оси были параллельны двум перпендикулярным рёбрам куба. Радиусы цилиндров равны $\frac{a}{4}$, поэтому расстояние между их осями не может быть меньше $\frac{a}{2}$. С другой стороны, они расположены внутри полосы толщиной a между двумя параллельными плоскостями. Поэтому расстояние между осями не может быть больше $\frac{a}{2}$. Следовательно, ось каждого цилиндра может перемещаться лишь в направлении оси другого цилиндра. Переместим эти два цилиндра так, чтобы они касались куба боковыми поверхностями, и в образовавшийся зазор вставим третий цилиндр, ось которого перпендикулярна осям двух первых цилиндров. Новый цилиндр не сможет перемещаться, поскольку первый цилиндр позволяет его оси двигаться только в одном направлении, а второй цилиндр — только в перпендикулярном направлении. Аналогично доказывается, что первые два цилиндра теперь тоже не смогут перемещаться.

19.37. а) Середины рёбер тетраэдра с ребром $2a$ являются вершинами октаэдра с ребром a. Если из тетраэдра вырезать этот октаэдр, то останутся четыре тетраэдра с ребром a.

б) Если от октаэдра с ребром $2a$ отрезать шесть октаэдров с ребром a, одна из вершин каждого из которых является вершиной исходного октаэдра, то останется восемь тетраэдров, основаниями которых являются треугольники, образованные серединами рёбер граней.

19.38. Рассмотрим целочисленную решётку и покрасим узлы, сумма координат которых чётна, белым цветом, а узлы, сумма координат которых нечётна, чёрным цветом. Тогда белые узлы служат центрами октаэдров, а чёрные — вершинами тетраэдров.

19.39. В качестве общей вершины пирамид можно взять одну из вершин куба, а в качестве их оснований — три грани куба, не содержащие эту вершину.

19.40. Ответ: на 5. Если из куба $ABCDA'B'C'D'$ вырезать тетраэдр $A'BC'D$, то оставшаяся часть куба распадается на четыре тетраэдра, т. е. куб можно разрезать на пять тетраэдров.

Докажем, что на меньшее число тетраэдров куб разрезать нельзя. Грань $ABCD$ не может быть гранью тетраэдра, на которые разбит куб, поэтому к ней прилегает по крайней мере два тетраэдра. Рассмотрим все тетраэдры, прилегающие к грани $ABCD$. Их высоты, опущенные на эту грань, не превосходят a, где a — ребро куба, а сумма площадей их граней, лежащих на $ABCD$, равна a^2. Поэтому сумма их объёмов не превосходит $\frac{a^3}{3}$. Так как грани одного тетраэдра не могут располагаться на противоположных гранях куба, к граням $ABCD$ и $A'B'C'D'$ прилегает по крайней мере 4 тетраэдра, причём сумма их объёмов не превосходит $\frac{2a^3}{3} < a^3$. Следовательно, есть ещё один тетраэдр разбиения.

19.41. Сумма углов каждой из четырёх граней тетраэдра равна 180°, поэтому сумма всех плоских углов тетраэдра равна $4 \cdot 180^\circ$. Следовательно, сумма плоских углов при одной из четырёх вершин тетраэдра не превосходит 180°, а значит, сумма любых двух плоских углов при ней меньше 180°. Пусть для определённости сумма любых двух плоских углов при вершине A тетраэдра $ABCD$ меньше 180°. Возьмём на ребре AC точку L и построим в плоскости ABC угол ALK, равный углу CAD. Так как

$$\angle KAL + \angle KLA = \angle BAC + \angle CAD < 180^\circ,$$

то лучи LK и AB пересекаются, и поэтому можно считать, что точка K лежит на луче AB. Аналогично строим на луче AD точку M так, что $\angle ALM = \angle BAC$. Если точка L достаточно близка к вершине A, то точки K и M лежат на рёбрах AB и AD. Покажем, что плоскость KLM разрезает тетраэдр требуемым образом. В самом деле, $\Delta KAL = \Delta MLA$, поэтому симметрия относительно прямой, соединяющей середины рёбер AL и KM, переводит ΔKAL в ΔMLA. При этом преобразовании тетраэдр $AKLM$ переходит в себя.

19.42. Рассмотрим все точки пересечения данных плоскостей. Докажем, что среди данных плоскостей нет трёх плоскостей, не разделяющих эти точки. В самом деле, предположим, что есть четыре такие плоскости. Никакая данная плоскость не может пересекать всех рёбер тетраэдра $ABCD$, заданного этими плоскостями; поэтому пятая данная плоскость (она есть, так как $n \geqslant 5$) пересекает, например, не ребро AB, а его продолжение в некоторой точке F. Пусть для определённости точка B лежит между A и F. Тогда плоскость BDC разделяет точки A и F, чего не может быть.

Таким образом, найдутся $n-3$ плоскости, по обе стороны от которых лежат рассматриваемые точки. Заметим теперь, что если среди всех рассматриваемых точек, лежащих по одну сторону от некоторой из данных плоскостей, взять ближайшую, то три плоскости, проходящие через эту точку, задают вместе с нашей плоскостью один из требуемых тетраэдров. В самом деле, если бы этот тетраэдр пересекала какая-либо данная плоскость, то нашлась бы более близкая к нашей плоскости точка пересечения. Следовательно, найдутся $n-3$ плоскости, к каждой из которой прилегает по крайней мере два тетраэдра, а к трём оставшимся плоскостям прилегает хотя бы по одному тетраэдру. Так как каждый тетраэдр прилегает ровно к четырём плоскостям, всего тетраэдров не менее $\dfrac{2(n-3)+3}{4} = \dfrac{2n-3}{4}$.

19.43. Проведём все плоскости, содержащие грани данного многогранника. Все части, на которые они разбивают пространство, выпуклые. Поэтому они задают требуемое разбиение.

19.44. а) Возьмём внутри многогранника произвольную точку P и разрежем его грани на треугольники. Треугольные пирамиды с вершиной P, основаниями которых являются эти треугольники, дают искомое разбиение.

б) Выберем одну из вершин V многогранника и рассмотрим грани, не смежные с вершиной V. Каждую из этих граней можно разрезать на треугольники, проведя в ней диагонали, выходящие из одной вершины. Треугольные пирамиды с вершиной V, основаниями которых служат полученные треугольники, дают искомое разбиение.

Замечание. Для невыпуклых многогранников это утверждение неверно: см. задачу 19.17.

19.45. Ответ: нет, не будет. Составим выпуклый многогранник из двух одинаковых правильных тетраэдров, склеив их по общей грани ABC; пусть D_1 и D_2 — две оставшиеся вершины этого многогранника. Помимо триангуляции, состоящей из двух исходных тетраэдров, у этого многогранника есть триангуляция на тетраэдры ABD_1D_2, BCD_1D_2, ACD_1D_2.

19.46. Покажем, что конструкция, описанная в решении задачи 19.44 (б), всегда даёт не более $2n-7$ тетраэдров. Рассмотрим плоскость, пересекающую все рёбра, выходящие из вершины V, и спроецируем на эту плоскость из точки V полученное ранее разбиение граней на треугольники. В результате получим некоторое разбиение на треугольники многоугольника, являющегося сечением многогранного угла с вершиной V. Пусть p — число этих треугольников, N_0 — число вершин многоугольника, N_1 — число вершин треугольников, лежащих на сторонах многоугольника, N_2 — число вершин треугольников, лежащих внутри многоугольника. Тогда $N_0+N_1+N_2=n-1$, и требуется доказать, что $p \leqslant 2(N_0+N_1+N_2)-5$. С одной стороны, сумма углов всех p треугольников равна $p\pi$. С другой стороны, эта сумма равна $(N_0-2)\pi+N_1\pi+2N_2\pi$, поэтому $N_0+N_1+2N_2-2=p$. Ясно, что $N_0 \geqslant 3$, поэтому $N_0+N_1 \geqslant 3$. Складывая это неравенство с равенством $N_0+N_1+2N_2-2=p$, получаем требуемое неравенство.

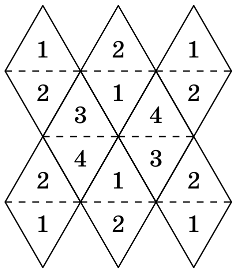


Рис. 19.9

19.47. Ответ: нет, не могут. Разобьём плоскость на треугольники, равные граням тетраэдра, и занумеруем их так, как показано на рис. 19.9. Вырежем треугольник, состоящий из четырёх таких треугольников, и свернём из него тетраэдр. Легко проверить, что если этот тетраэдр перевернуть через ребро, а затем вновь развернуть на плоскость, разрезав по боковым ребрам, то номера треугольников развёртки совпадут с номерами треугольников на плоскости. Следовательно, после любого числа переворачиваний тетраэдра номера треугольников его развёртки совпадут с номерами треугольников на плоскости.

19.48. Вырежем из данного параллелепипеда полоску толщиной в два кубика и склеим оставшиеся части. Докажем, что раскраска нового параллелепипеда обладает прежним свойством, т. е. соседние кубики окрашены в разные цвета. Это нужно проверить лишь для кубиков, прилегающих к плоскости разреза. Рассмотрим четыре кубика с общим ребром, прилегающих к плоскости разреза и расположенных по одну сторону от неё. Пусть они окрашены в цвета 1—4; будем двигаться в исходном параллелепипеде от этих кубиков ко второй плоскости разреза. Прилегающие к ним кубики первого вырезанного слоя должны быть окрашены в другие цвета, т. е. в цвета 5—8. Далее, прилегающие к этой новой четвёрке кубов кубики окрашены не в цвета 5—8, т. е. в цвета 1—4, а к ним, в свою очередь, прилегают кубики, окрашенные не в цвета 1—4, т. е. в цвета 5—8. Таким образом, к рассматриваемой четвёрке кубиков в новом параллелепипеде прилегают кубики других цветов. Рассмотрев для кубика, прилегающего к разрезу, все четыре такие четвёрки, получим требуемое.

Из любого прямоугольного параллелепипеда размером $2l \times 2m \times 2n$ с помощью описанной выше операции можно получить куб размером $2 \times 2 \times 2$, причём у него будут те же самые угловые кубики. Так как любые два кубика куба размером $2 \times 2 \times 2$ имеют хотя бы одну общую точку, все они окрашены в разные цвета.

ГЛАВА 20

ИНВЕРСИЯ И СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Пусть в пространстве дана сфера S с центром O и радиусом R. *Инверсией* относительно сферы S называют преобразование, переводящее произвольную точку A, отличную от O, в точку A^*, лежащую на луче OA на расстоянии $OA^* = R^2/OA$ от точки O. Инверсию относительно сферы S будем также называть инверсией с центром O и степенью R^2. Всюду в этой главе образ точки A при инверсии обозначается через A^*.

§ 1. Свойства инверсии

20.1. а) Докажите, что при инверсии с центром O плоскость, проходящая через точку O, переходит в себя.

б) Докажите, что при инверсии с центром O плоскость, не проходящая через точку O, переходит в сферу, проходящую через точку O.

в) Докажите, что при инверсии с центром O сфера, проходящая через точку O, переходит в плоскость, не проходящую через точку O.

20.2. Докажите, что при инверсии с центром O сфера, не проходящая через точку O, переходит в сферу.

20.3. Докажите, что при инверсии прямая или окружность переходит в прямую или окружность.

20.4. При инверсии с центром O окружность C переходит в окружность C^*. Пусть сфера S содержит точку O и окружность C.

а) Докажите, что плоскость окружности C^* параллельна плоскости, касающейся сферы S в точке O.

б) Докажите, что центр окружности C^* лежит на прямой, соединяющей точку O с полюсом плоскости окружности C относительно сферы S.

Углом между двумя пересекающимися сферами (сферой и плоскостью) называют угол между касательными плоскостями к сферам, проведёнными через любую из точек пересечения сфер.

Углом между двумя пересекающимися окружностями в пространстве (окружностью и прямой) называют угол между касательными прямыми к окружностям, проведёнными через любую из точек пересечения окружностей.

20.5. а) Докажите, что при инверсии сохраняется угол между пересекающимися сферами (плоскостями).

б) Докажите, что при инверсии сохраняется угол между пересекающимися окружностями (прямыми).

20.6. Пусть O — центр инверсии, R^2 — её степень. Докажите, что $A^*B^* = \dfrac{AB \cdot R^2}{OA \cdot OB}$.

20.7. а) Даны сфера и точка O, лежащая вне этой сферы. Докажите, что существует инверсия с центром O, переводящая данную сферу в себя.

б) Даны сфера и точка O, лежащая внутри этой сферы. Докажите, что существует инверсия с центром O, переводящая данную сферу в сферу, симметричную ей относительно точки O.

20.8. Пусть инверсия с центром O переводит сферу S в сферу S^*. Докажите, что O — центр гомотетии, переводящей S в S^*.

20.9. Докажите, что при инверсии относительно сферы S сфера S_1 переходит в себя тогда и только тогда, когда сферы S и S_1 ортогональны.

20.10. При инверсии относительно сферы S точка A переходит в точку A^*. Докажите, что любая сфера S_1, проходящая через точки A и A^*, ортогональна сфере S.

§ 2. Сделаем инверсию

20.11. Докажите, что угол между описанными окружностями двух граней тетраэдра равен углу между описанными окружностями двух других его граней.

20.12. Решите задачу 4.18 с помощью инверсии.

20.13. Даны n сфер, любые две из которых ортогональны. Докажите, что $n \leqslant 4$.

20.14. Пусть C — центр окружности, по которой прямой круговой конус с вершиной X касается данной сферы. Какое геометрическое место пробегают точки C, когда X пробегает плоскость Π, не имеющую со сферой общих точек?

20.15. Докажите, что для произвольного тетраэдра существует треугольник, длины сторон которого равны произведениям длин противоположных рёбер тетраэдра.

Докажите также, что площадь этого треугольника равна $6VR$, где V — объём тетраэдра, а R — радиус его описанной сферы. (Формула Крелле.)

20.16. Дан выпуклый шестигранник, все грани которого — четырёхугольники. Известно, что из восьми его вершин семь лежат на одной сфере. Докажите, что и восьмая вершина лежит на той же сфере.

См. также задачу 8.86.

§ 3. Наборы касающихся сфер

20.17. Четыре сферы попарно касаются друг друга в шести различных точках. Докажите, что эти шесть точек лежат на одной сфере.

20.18. Даны четыре сферы S_1, S_2, S_3 и S_4, причём сферы S_1 и S_2 касаются в точке A_1; S_2 и S_3 — в точке A_2; S_3 и S_4 — в точке A_3; S_4 и S_1 — в точке A_4. Докажите, что точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на одной окружности (или на одной прямой).

20.19. Даны n сфер, каждая из которых касается всех остальных, причём никакие три сферы не касаются в одной точке. Докажите, что $n \leqslant 5$.

20.20. Даны три попарно касающиеся сферы Σ_1, Σ_2, Σ_3 и набор сфер $S_1, S_2, \ldots, S_n$, причём каждая сфера S_i касается всех трёх сфер Σ_1, Σ_2, Σ_3, а также сфер S_{i-1} и S_{i+1} (имеется в виду, что $S_0 = S_n$ и $S_{n+1} = S_1$). Докажите, что если все точки касания сфер попарно различны и $n > 2$, то $n = 6$.

20.21. Четыре сферы попарно касаются в различных точках, и их центры лежат в одной плоскости Π. Сфера S касается всех этих сфер. Докажите, что отношение её радиуса к расстоянию от её центра до плоскости Π равно $1 : \sqrt{3}$.

20.22. Три попарно касающихся шара касаются плоскости в трёх точках, лежащих на окружности радиуса R. Докажите, что существуют два шара, касающиеся трёх данных шаров и плоскости, причём если r и ρ $(\rho > r)$ — радиусы этих шаров, то

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{2\sqrt{3}}{R}.$$

§ 4. Конус

Пусть даны окружность C и точка O, лежащая вне плоскости этой окружности. *Конусом* называют фигуру, заметаемую всеми прямыми, соединяющими данную точку O с точками данной окружности C. Если точка O лежит на прямой, проходящей через центр окружности C перпендикулярно её плоскости, то конус называют *прямым*, а если не лежит, то *наклонным*. Окружность C называют *круговым основанием* конуса, а точку O называют его *вершиной*.

20.23. Докажите, что у наклонного конуса с круговым основанием C есть круговые сечения плоскостями, не параллельные этому основанию.

Круговое сечение конуса, построенное в решении задачи 20.23, называют *антипараллельным* основанию.

20.24. Для конуса с вершиной O и круговым основанием C рассмотрим сферу S, которая проходит через точку O и содержит окружность C. Докажите, что сечение конуса, антипараллельное основанию, параллельно плоскости, касающейся сферы S в точке O.

20.25. На сфере S даны две окружности C_1 и C_2. Докажите, что через окружности C_1 и C_2 можно провести либо два конуса, либо конус и цилиндр.

§ 5. Стереографическая проекция

Пусть плоскость Π касается сферы S в точке A. Проведём диаметр AB этой сферы. *Стереографической проекцией из точки B* называют отображение сферы S с выколотой точкой B на плоскость Π, при котором точке X, лежащей на сфере, сопоставляется точка Y, в которой луч BX пересекает плоскость Π.

З а м е ч а н и е. Иногда стереографическую проекцию определяют по-другому: вместо плоскости Π берут плоскость Π', проходящую через центр O сферы S параллельно Π. Ясно, что если Y' — точка пересечения луча BX с плоскостью Π', то $2\overrightarrow{OY'} = \overrightarrow{AY}$. Поэтому разница между двумя этими определениями не существенна.

20.26. а) Докажите, что стереографическая проекция совпадает с ограничением на сферу некоторой инверсии в пространстве.

б) Докажите, что при стереографической проекции окружность на сфере, проходящая через точку B, переходит в прямую, а окружность, не проходящая через точку B, переходит в окружность.

в) Докажите, что при стереографической проекции сохраняются углы между окружностями.

20.27. В пространстве даны окружность S и точка B. Пусть A — проекция точки B на плоскость, содержащую окружность S. Для каждой точки D окружности S рассмотрим точку M — проекцию точки A на прямую DB. Докажите, что все точки M лежат на одной окружности.

20.28. Дана пирамида $SABCD$, причём ее основание — выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями, а плоскость основания перпендикулярна прямой SO, где O — точка пересечений диагоналей. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки O на боковые грани пирамиды, лежат на одной окружности.

20.29. Сфера S с диаметром AB касается плоскости Π в точке A. Докажите, что при стереографической проекции симметрия относительно плоскости, параллельной Π и проходящей через центр сферы S, переходит в инверсию с центром A и степенью AB^2. Точнее говоря, если точки X_1 и X_2 симметричны относительно указанной плоскости, а Y_1 и Y_2 — образы точек X_1 и X_2 при стереографической проекции, то Y_1 — образ точки Y_2 при указанной инверсии.

20.30. Можно ли расположить на плоскости несколько непересекающихся кругов так, чтобы каждый из них касался ровно пяти остальных?

20.31. На сфере даны три окружности S_a, S_b и S_c, пересекающиеся в точке P. Помимо точки P окружности S_b и S_c пересекаются в точке A, окружности S_c и S_a — в точке B, окружности S_a и S_b — в точке C. На окружностях S_a, S_b и S_c выбраны точки A_1, B_1 и C_1, отличные от точек A, B, C и P. Докажите, что окружности, проходящие через тройки точек AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, пересекаются в одной точке.

20.32. На каждом ребре тетраэдра $ABCD$ выбрана точка. Докажите, что четыре сферы, каждая из которых проходит через вершину тетраэдра и выбранные точки на выходящих из неё рёбрах, пересекаются в одной точке (Микель).

Решения

20.1. Пусть R^2 — степень рассматриваемой инверсии.

а) Рассмотрим луч с началом в точке O и введём на нем координаты. Тогда точка с координатой x переходит при инверсии в точку с координатой $\dfrac{R^2}{x}$. Поэтому луч с началом в точке O переходит при инверсии в себя. Следовательно, плоскость, проходящая через точку O, переходит в себя.

б) Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на данную плоскость, а X — любая другая точка этой плоскости. Достаточно доказать, что $\angle OX^*A^* = 90^\circ$ (в самом деле это означает, что образ любой точки рассматриваемой плоскости лежит на сфере с диаметром OA^*). Ясно, что $OA^* : OX^* = \left(\dfrac{R^2}{OA}\right) : \left(\dfrac{R^2}{OX}\right) = OX : OA$, т. е. $\Delta OX^*A^* \sim \Delta OAX$. Поэтому $\angle OX^*A^* = {}$ $= \angle OAX = 90^\circ$. Для полноты доказательства следует заметить, что любая точка Y сферы с диаметром OA^*, отличная от точки O, является образом точки данной плоскости — точки пересечения луча OY с данной плоскостью.

в) Можно провести такие же рассуждения, как в предыдущей задаче, а можно и более или менее прямо ею воспользоваться, так как $(X^*)^* = X$.

20.2. Пусть A и B — точки, в которых данную сферу S пересекает прямая, проходящая через точку O и центр сферы S, а X — произвольная точка сферы S. Достаточно доказать, что $\angle A^*X^*B^* = 90^\circ$. Из равенств $OA \cdot OA^* = OX \cdot OX^*$ и $OB \cdot OB^* = OX \cdot OX^*$ вытекает, что $\Delta OAX \sim \Delta OX^*A^*$ и $\Delta OBX \sim \Delta OX^*B^*$, а из этого получаем следующие соотношения между ориентированными углами (по поводу определения и свойств ориентированных углов см. «Задачи по планиметрии», с. 30): $\angle(A^*X^*, OA^*) = \angle(OX, XA)$ и $\angle(OB^*, X^*B^*) = \angle(XB, OX)$. Поэтому

$$\angle(A^*X^*, X^*B^*) = \angle(A^*X^*, OA^*) + \angle(OB^*, X^*B^*) = \angle(OX, XA) + \angle(XB, XA) = 90^\circ.$$

20.3. Легко проверить, что любую прямую можно представить в виде пересечения двух плоскостей, а любую окружность — в виде пересечения сферы и плоскости. В задачах 20.1 и 20.2 было показано, что при инверсии плоскость или сфера переходит в плоскость или сферу. Поэтому при инверсии прямая или окружность переходит в фигуру, являющуюся пересечением либо двух плоскостей, либо сферы и плоскости, либо двух сфер. Остаётся заметить, что пересечением сферы и плоскости (а также пересечением двух сфер) является окружность.

20.4. а) При инверсии с центром O сфера S переходит в плоскость Π, параллельную плоскости, касающейся сферы S в точке O. Окружность C расположена на сфере S, поэтому её образ при инверсии лежит в плоскости Π.

б) Рассмотрим сечение любой плоскостью, содержащей точку O и центр окружности C. Пусть F и G — точки окружности C, лежащие в этой плоскости, S' — окружность, полученная как сечение сферы S. Полюс плоскости окружности C относительно сферы S — это точка L пересечения касательных к окружности S' в точках E и F. Требуется доказать, что в треугольнике $OE'F'$, продолжениями двух сторон которого являются лучи OE и OF, а третья сторона параллельна касательной к окружности S' в точке O, медиана OL' лежит на прямой OL. Пусть H — точка пересечения прямой OL и окружности S'. Тогда $\Delta LEO \sim \Delta LHE$, поэтому $EO : HE = LO : LE$. Аналогично $FO : HF = LO : LF$. Учитывая, что $LE = LF$, получаем $EO : HE = FO : HF$. Поэтому из равенств

$$\frac{OL'}{E'L'} = \frac{\sin OE'L'}{\sin E'OL'} = \frac{\sin EHO}{\sin EOH} = \frac{EO}{EH} \quad \text{и} \quad \frac{OL'}{F'L'} = \frac{EO}{FH}$$

следует, что $E'L' = F'L'$.

20.5. а) Докажем сначала, что касающиеся сферы переходят при инверсии либо в касающиеся сферы (сферу и плоскость), либо в пару параллельных плоскостей. Это легко следует из того, что касающиеся сферы — это сферы, имеющие единственную общую точку (и того, что при инверсии сфера переходит в сферу или плоскость). Поэтому угол между образами сфер равен углу между образами касательных плоскостей, проведённых через точку пересечения.

Таким образом, остаётся провести доказательство для двух пересекающихся плоскостей Π_1 и Π_2. При инверсии с центром O плоскость Π_i переходит в сферу, проходящую через точку O, причём касательная плоскость к ней в этой точке параллельна плоскости Π_i. Из этого следует, что угол между образами плоскостей Π_1 и Π_2 равен углу между плоскостями Π_1 и Π_2.

б) Для начала нужно сформулировать определение касания окружностей в сохраняющемся при инверсии виде. Сделать это несложно: две окружности в пространстве касаются тогда и только тогда, когда они принадлежат одной сфере (или плоскости) и имеют единственную общую точку. Теперь уже легко доказать, что касающиеся окружности переходят при инверсии в касающиеся окружности (окружность и прямую) или пару параллельных прямых. Дальнейшее доказательство проводится точно так же, как и в задаче (а).

20.6. Ясно, что $OA \cdot OA^* = R^2 = OB \cdot OB^*$. Поэтому $OA : OB^* = OB : OA^*$, т. е. $\triangle OAB \sim \triangle OB^*A^*$. Следовательно,

$$\frac{A^*B^*}{AB} = \frac{OB^*}{OA} = \frac{OB^*}{OA} \cdot \frac{OB}{OB} = \frac{R^2}{OA \cdot OB}.$$

20.7. Пусть X и Y — точки пересечения данной сферы с прямой, проходящей через точку O. Рассмотрим инверсию с центром O и коэффициентом R^2. Легко проверить, что в обеих задачах фактически требуется подобрать коэффициент R^2 так, чтобы для любой прямой, проходящей через точку O, выполнялось равенство $OX \cdot OY = R^2$. Остаётся заметить, что величина $OX \cdot OY$ не зависит от выбора прямой.

20.8. Пусть A_1 — точка сферы S, а A_2 — вторая точка пересечения прямой OA_1 со сферой S (если OA_1 — касательная к S, то $A_2 = A_1$). Легко проверить, что величина $d = OA_1 \cdot OA_2$ одна и та же для всех прямых, пересекающих сферу S. Если R^2 — степень инверсии, то $OA_1^* = \dfrac{R^2}{OA_1} = \dfrac{R^2}{d} OA_2$. Таким образом, если точка O лежит внутри сферы S, то A_1^* — образ точки A_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом $-\dfrac{R^2}{d}$, а если точка O лежит вне сферы S, то A_1^* — образ точки A_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом $\dfrac{R^2}{d}$.

20.9. Пусть при инверсии относительно сферы S сфера S_1 переходит в сферу S_1^*. Проведём через центр инверсии O общую касательную к сферам S_1 и S_1^*; пусть P_1 и P_1^* — точки касания. Сфера S_1 переходит в себя тогда и только тогда, когда точки P_1 и P_1^* совпадают, т. е. точка P_1 лежит на сфере S. Последнее условие эквивалентно тому, что радиус OP_1 сферы S касается сферы S_1, т. е. сферы S и S_1 ортогональны.

20.10. Сфера S_1 пересекает сферу S по окружности C, все точки которой остаются неподвижными при рассматриваемой инверсии. Поэтому при инверсии сфера S_1 переходит в сферу, которая содержит окружность C и точки A и A^*, т. е. переходит в себя. Согласно задаче 20.9 такая сфера ортогональна сфере S.

20.11. Рассмотрим инверсию с центром в вершине D тетраэдра $ABCD$. Описанные окружности граней DAB, DAC и DBC при этом перейдут в прямые A^*B^*, A^*C^* и B^*C^*, а описанная окружность грани ABC — в описанную окружность S треугольника $A^*B^*C^*$. Так как при инверсии углы между окружностями (или прямыми) сохраняются (см. задачу 20.5 (б)), нужно доказать, что угол между прямой A^*B^* и окружностью S равен углу между прямыми A^*C^* и B^*C^* (рис. 20.1). Это непосредственно следует из того, что угол между касательной к окружности в точке A^* и хордой A^*B^* равен вписанному углу $A^*C^*B^*$.

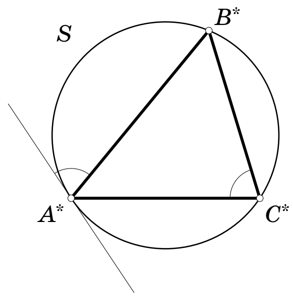


Рис. 20.1

20.12. Рассмотрим сначала случай, когда точка P лежит вне данной сферы S. Пусть X и Y — точки пересечения сферы S с прямой, проходящей через точку P. Легко проверить, что величина $PX \cdot PY$ не зависит от выбора прямой; обозначим её через R^2. Рассмотрим инверсию с центром P и степенью R^2. Ясно, что $X^* = Y$, т. е. множество вторых точек пересечения сферы S с прямыми, соединяющими точку P с точками данной окружности, является образом данной окружности при рассматриваемой инверсии. Остаётся заметить, что образ окружности при инверсии является окружностью.

В случае, когда точка P лежит внутри данной сферы S, решение аналогично, но нужно рассмотреть не инверсию с центром P и степенью R^2, а композицию этой инверсии и симметрии относительно точки P.

20.13. Сделаем инверсию с центром в точке пересечения двух сфер. При этой инверсии они перейдут в две перпендикулярные плоскости. Сфера ортогональна этим плоскостям тогда и только тогда, когда её центр лежит на прямой их пересечения. Ясно, что в таком случае сфера и рассматриваемые плоскости имеют общую точку, т. е. исходные три сферы имеют общую точку. Можно считать, что первоначальная инверсия была сделана с центром именно в этой точке. Тогда мы получаем три попарно перпендикулярные плоскости, причём сфера ортогональна им тогда и только тогда, когда её центр совпадает с точкой пересечения этих плоскостей. Концентрические сферы не пересекаются, поэтому они не могут быть ортогональны. Таким образом, сфер не может быть больше четырёх.

З а м е ч а н и е. Если мы возьмём три попарно перпендикулярные плоскости и сферу с центром в точке их пересечения, то после инверсии с центром в точке, не принадлежащей ни сфере, ни плоскостям, мы получим четыре сферы, любые две из которых ортогональны.

20.14. Пусть O — центр данной сферы, XA — некоторая касательная к сфере. Так как AC — высота прямоугольного треугольника OAX, то $\Delta ACO \sim \Delta XAO$. Поэтому $AO:CO = XO:AO$, т. е. $CO \cdot XO = AO^2$. Следовательно, точка C является образом точки X при инверсии с центром O и степенью $AO^2 = R^2$, где R — радиус данной сферы. Образом плоскости Π при этой инверсии является сфера диаметра $\dfrac{R^2}{OP}$, где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость Π; эта сфера проходит через точку O, а её центр лежит на отрезке OP.

20.15. Пусть дан тетраэдр $ABCD$. Рассмотрим инверсию с центром D и степенью r^2. Тогда $A^*B^* = \dfrac{ABr^2}{DA \cdot DB}$, $B^*C^* = \dfrac{BCr^2}{BD \cdot DC}$ и $A^*C^* = \dfrac{ACr^2}{DA \cdot DC}$. Следовательно, если взять $r^2 = DA \cdot DB \cdot DC$, то $A^*B^*C^*$ — искомый треугольник. Для вычисления площади треугольника $A^*B^*C^*$ найдём объём тетраэдра $A^*B^*C^*D$ и его высоту, проведённую из вершины D. Описанная сфера тетраэдра $ABCD$ переходит при инверсии в плоскость $A^*B^*C^*$. Поэтому расстояние от этой плоскости до точки D равно $\dfrac{r^2}{2R}$. Далее, отношение объёмов тетраэдров $ABCD$ и $A^*B^*C^*D$ равно произведению отношений длин рёбер, выходящих из точки D. Следовательно,

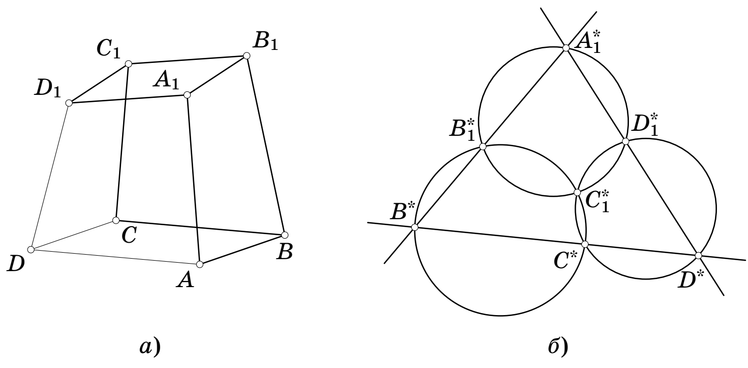
$$V_{A^*B^*C^*D} = V\frac{DA^*}{DA} \cdot \frac{DB^*}{DB} \cdot \frac{DC^*}{DC} = V\left(\frac{r}{DA}\right)^2\left(\frac{r}{DB}\right)^2\left(\frac{r}{DC}\right)^2 = Vr^2.$$

Пусть S — площадь треугольника $A^*B^*C^*$. Воспользовавшись формулой

$$V_{A^*B^*C^*D} = \frac{1}{3}h_a S,$$

получим $Vr^2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{r^2}{2R}S$, т. е. $S = 6VR$.

20.16. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный шестигранник, причём лишь про вершину C_1 неизвестно, что она лежит на данной сфере (рис. 20.2, *а*). Рассмотрим инверсию с центром A. При этой инверсии данная сфера переходит



а) *б*)

Рис. 20.2

в плоскость, а описанные окружности граней $ABCD$, ABB_1A_1 и AA_1D_1D — в прямые (рис. 20.2, *б*). Точка C_1 является точкой пересечения плоскостей $A_1B_1D_1$, CD_1D и BB_1C, поэтому её образ C_1^* является точкой пересечения образов этих плоскостей, т. е. описанных сфер тетраэдров $AA_1^*B_1^*D_1^*$, $AC^*D_1^*D^*$ и $AB^*B_1^*C^*$ (имеется в виду точка, отличная от A). Следовательно, чтобы доказать, что точка C_1 принадлежит данной сфере, достаточно доказать, что описанные окружности треугольников $A_1^*B_1^*D_1^*$, $C^*D_1^*D^*$ и $B^*B_1^*C^*$ имеют общую точку (см. «Задачи по планиметрии», задача 2.83 (а)).

20.17. Достаточно проверить, что при инверсии с центром в точке касания двух сфер остальные пять точек касания переходят в точки, лежащие в одной плоскости. При этой инверсии две сферы переходят в пару параллельных плоскостей, а две другие сферы — в пару сфер, касающихся их и друг друга. Точки касания этих двух сфер с плоскостями являются вершинами квадрата, а точка касания самих сфер — точкой пересечения его диагоналей.

20.18. Рассмотрим инверсию с центром A_1. При этом сферы S_1 и S_2 переходят в параллельные плоскости S_1^* и S_2^*. Нужно доказать, что точки A_2^*, A_3^* и A_4^* лежат на одной прямой (A_2^* — точка касания плоскости S_2^* и сферы S_3^*, A_3^* —точка касания сфер S_3^* и S_4^*, A_4^* — точка касания плоскости S_1^* и сферы S_4^*). Рассмотрим сечение плоскостью, содержащей параллельные отрезки $A_2^*O_3$ и $A_4^*O_4$, где O_3 и O_4 — центры сфер S_3^* и S_4^* (рис. 20.3). Точка A_3^* лежит на отрезке O_3O_4, поэтому она лежит в плоскости сечения. Углы при вершинах O_3 и O_4 равнобедренных треугольников $A_2^*O_3A_3^*$ и $A_3^*O_4A_4^*$ равны, так как $A_2^*O_3 \parallel A_4^*O_4$. Следовательно, $\angle O_4A_3^*A_4^* = \angle O_3A_3^*A_2^*$, а значит, точки A_2^*, A_3^* и A_4^* лежат на одной прямой.

20.19. Рассмотрим инверсию с центром в одной из точек касания сфер. Эти сферы переходят в пару параллельных плоскостей, а остальные $n-2$ сферы — в сферы, касающиеся обеих этих плоскостей. Ясно, что диаметр любой сферы, касающейся двух параллельных плоскостей, равен расстоянию между

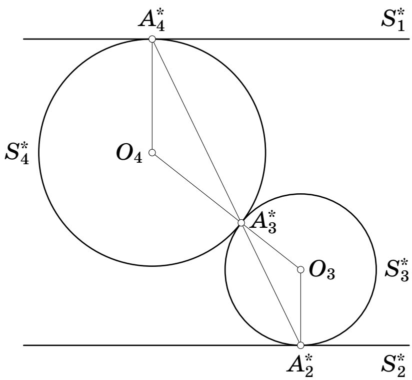


Рис. 20.3

плоскостями. Рассмотрим теперь сечение плоскостью, равноудалённой от двух наших параллельных плоскостей. В сечении имеем систему из $n-2$ попарно касающихся равных окружностей. На плоскости нельзя расположить больше трёх равных окружностей так, чтобы они попарно касались. Поэтому $n-2 \leqslant 3$, т. е. $n \leqslant 5$.

З а м е ч а н и е. Если мы возьмём три попарно касающиеся сферы одного радиуса и рассмотрим две параллельные опорные плоскости к ним, то после инверсии с центром в точке, не принадлежащей ни сферам, ни плоскостям, мы получим пять сфер, каждая из которых касается всех остальных.

20.20. Рассмотрим инверсию с центром в точке касания сфер Σ_1 и Σ_2. При этом они переходят в пару параллельных плоскостей, а образы всех остальных сфер касаются этих плоскостей, и поэтому их радиусы равны. Таким образом, в сечении плоскостью, равноудалённой от этих параллельных плоскостей, получается то, что изображено на рис. 20.4.

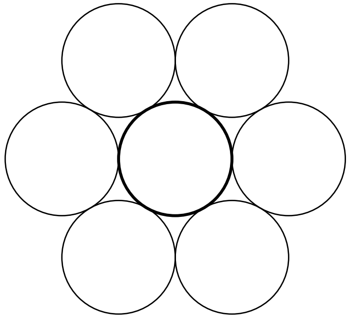


Рис. 20.4

20.21. Рассмотрим инверсию с центром в точке касания некоторых двух сфер. При этой инверсии плоскость Π переходит в себя, так как точка касания двух сфер лежит на прямой, соединяющей их центры; касающиеся в центре инверсии сферы переходят в пару параллельных плоскостей, перпендикулярных плоскости Π, а остальные две сферы — в сферы с центрами в плоскости Π, поскольку они как были симметричны относительно неё, так и останутся. И образы этих сфер, и образ сферы S касаются пары параллельных плоскостей, поэтому их радиусы равны.

Рассмотрим (для образов при инверсии) сечение плоскостью, равноудалённой от пары наших параллельных плоскостей. Пусть A и B (лежащие в плоскости Π) — центры образов сфер, C — центр третьей сферы, а CD — высота равностороннего треугольника ABC. Если R — радиус сферы S^*, то $CD = \frac{\sqrt{3}AC}{2} = \sqrt{3}R$. Поэтому для сферы S^* отношение радиуса к расстоянию от центра до плоскости Π равно $1 : \sqrt{3}$. Остаётся заметить, что при инверсии с центром, принадлежащим плоскости Π, отношение радиуса сферы к расстоянию от её центра до плоскости Π одно и то же и для сферы S, и для сферы S^* (см. задачу 20.8).

20.22. Рассмотрим инверсию степени $(2R)^2$ с центром O в одной из точек касания сфер с плоскостью; эта инверсия переводит окружность, проходящую через точки касания сфер с плоскостью, в прямую AB, удалённую or точки O на расстояние $2R$ (A и B — образы точек касания). Существование двух сфер, касающихся двух параллельных плоскостей (исходной плоскости и образа одной сферы) и образов двух других сфер, очевидно. Пусть P и Q — центры этих шаров, P' и Q' — проекции точек P и Q на плоскость OAB. Тогда $P'AB$ и $Q'AB$ — равносторонние треугольники со стороной $2a$, где a — радиус сфер, т. е. половина расстояния между плоскостями (рис. 20.5). Поэтому

$$r = \frac{a \cdot 4R^2}{PO^2 - a^2} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{a \cdot 4R^2}{QO^2 - a^2}$$

(задача 20.6), значит,

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{PO^2 - QO^2}{4aR^2} = \frac{P'O^2 - Q'O^2}{4aR^2} = \frac{(P'O')^2 - (Q'O')^2}{4aR^2} =$$

$$= \frac{(2R + \sqrt{3}a)^2 - (2R - \sqrt{3}a)^2}{4aR^2} = \frac{2\sqrt{3}}{R}$$

(здесь O' — проекция точки O на прямую $P'Q'$).

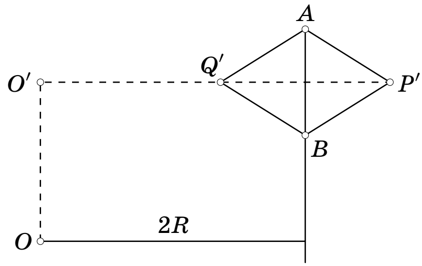


Рис. 20.5

20.23. Рассмотрим инверсию с центром в вершине конуса. При этой инверсии окружность C переходит в окружность C^*. Окружность C^* лежит на рассматриваемом конусе, и её плоскость не параллельна плоскости основания.

20.24. Пусть A и B — точки пересечения окружности C и проекции на плоскость этой окружности прямой, соединяющей точку O с центром окружности C. Плоскость AOB является плоскостью симметрии рассматриваемого конуса. При инверсии с центром O точки A и B переходят в точки A^* и B^*, которые тоже лежат в этой плоскости, поэтому отрезок A^*B^* является диаметром антипараллельного сечения. Из подобия треугольников OAB и OB^*A^* следует, что $\angle OAB = \angle OB^*A^*$. Поэтому прямая A^*B^* параллельна касательной к описанной окружности треугольника AOB в точке O. Из этого следует требуемое.

20.25. Рассмотрим сечение плоскостью, проходящей через центры сферы S и окружностей C_1 и C_2. Пусть эта плоскость пересекает окружность C_1 в точках A и B (концах диаметра), а окружность C_2 — в точках C и D. Пусть прямые AC и BD пересекаются в точке O_1, а прямые BC и AD — в точке O_2. Согласно задаче 4.18 (она совпадает с задачей 20.12) конус с вершиной O_1 (или с вершиной O_2) и основанием C_1 пересекает сферу S по окружности C_2. Если одна из точек O_1 и O_2 бесконечно удалённая (т. е. прямые не пересекающиеся, а параллельные), то вместо конуса мы получаем цилиндр.

20.26. Пусть плоскость Π касается в точке A сферы S с диаметром AB. Пусть, далее, X — точка сферы S, а Y — точка пересечения луча BX с плоскостью Π. Тогда $\Delta AXB \sim \Delta YAB$, и поэтому $AB:XB = YB:AB$, т. е. $XB \cdot YB = AB^2$. Следовательно, точка Y является образом точки X при инверсии с центром B и степенью AB^2.

Задачи (б) и (в) являются следствиями только что доказанного утверждения и соответствующих свойств инверсии.

20.27. Так как $\angle AMB = 90^\circ$, точка M принадлежит сфере с диаметром AB. Поэтому точка D является образом точки M при стереографической проекции сферы с диаметром AB на плоскость, содержащую окружность S. Следовательно, все точки M лежат на одной окружности — образе окружности S при инверсии с центром B и степенью AB^2 (см. задачу 20.26 (а)).

20.28. Опустим из точки O перпендикуляр OA' на грань SAB. Пусть A_1 — точка пересечения прямых AB и SA'. Так как $AB \perp OS$ и $AB \perp OA'$, плоскость SOA' перпендикулярна прямой AB, и поэтому $OA_1 \perp AB$, т. е. A_1 — проекция точки O на сторону AB. Ясно также, что A_1 — образ точки A' при стереографической проекции сферы с диаметром SO на плоскость основания. Таким образом, нужно доказать, что проекции точки O на стороны четырёхугольника $ABCD$ лежат на одной окружности (см. «Задачи по планиметрии», задача 6.20).

20.29. Так как точки X_1 и X_2 симметричны относительно плоскости, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину, то $\angle ABX_1 = \angle BAX_2$. Поэтому прямоугольные треугольники ABY_1 и AY_2B подобны. Следовательно, $AB:AY_1 = AY_2:AB$, т. е. $AY_1 \cdot AY_2 = AB^2$.

20.30. Ответ: да, можно. Рассмотрим правильный додекаэдр и впишем в каждую его грань окружность. Эти окружности лежат на одной сфере, касающейся рёбер додекаэдра. Выберем на этой сфере точку, лежащую вне всех окружностей, и рассмотрим стереографическую проекцию из этой точки. Круги, ограниченные проекциями рассматриваемых окружностей, обладают требуемым свойством.

20.31. Рассмотрим стереографическую проекцию из точки P. При этом преобразовании окружности S_a, S_b и S_c перейдут в прямые. Таким образом, эта задача сводится к известному факту из планиметрии: если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1, то описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C пересекаются в одной точке (см. «Задачи по планиметрии», задача 2.83 (а)).

20.32. Пусть точки a, b, c, a', b' и c' выбраны на рёбрах BC, CA, AB, DA, DB и DC соответственно. Тогда рассматриваемые сферы S_a, S_b, S_c и S_d — это описанные сферы тетраэдров $Aa'bc$, $Bb'ca$, $Cc'ab$ и $Da'b'c'$. Сферы S_a, S_b и S_c пересекают плоскость ABC по описанным окружностям треугольников Abc, Bca и Cab. Эти три окружности пересекаются в одной точке D' (см. «Задачи по планиметрии», задача 2.83 (а)). Аналогично определим точки A', B' и C' в плоскостях BCD, ACD и ABD. Описанные окружности треугольников

$a'b'C'$, $b'c'A'$ и $c'a'B'$ лежат на сфере S_d и проходят через точку D. Поэтому согласно задаче 20.31 описанные окружности треугольников $a'B'C'$, $b'C'A'$ и $c'A'B'$ пересекаются в одной точке Q. Но эти окружности принадлежат сферам S_a, S_b и S_c соответственно. Следовательно, сферы S_a, S_b и S_c проходят через точку Q, лежащую на сфере S_d.

ГЛАВА 21

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА (КВАДРИКИ)

Основные сведения

Квадрикой называют поверхность, заданную уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{23}yz + a_{13}xz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0.$$

Замечание. Это уравнение может задавать не поверхность, а фигуру, имеющую меньшую размерность: прямую, точку или даже пустое множество. Такие фигуры мы не относим к квадрикам.

Квадрику называют *конусом*, если в некоторой прямоугольной системе координат она задаётся уравнением $ax^2 + by^2 = z^2$, где $a, b > 0$. В том случае, когда $a = b$, конус называют *конусом вращения* или *прямым круговым конусом*. Точку $(0, 0, 0)$ называют *вершиной* конуса, а ось Oz называют *осью* конуса.

§ 1. Сечения конуса и цилиндра

21.1. Докажите, что сечение прямого кругового цилиндра плоскостью, не параллельной и не перпендикулярной его оси, является эллипсом.

21.2. Пусть прямой круговой конус пересечен плоскостью. Докажите, что если секущая плоскость пересекает все образующие одной полы конуса, то сечение — эллипс, если все, кроме одной, то сечение — парабола, а если она пересекает обе полы конуса, то сечение — гипербола.

21.3. Пусть плоскость Π пересекает все образующие одной полы прямого кругового конуса, а F_1 и F_2 — точки, в которых вписанные в конус сферы касаются плоскости Π. Докажите, что сумма расстояний от точки X пересечения Π и конуса до F_1 и F_2 есть величина постоянная.

§ 2. Прямой круговой конус

21.4. Докажите, что уравнение прямого кругового конуса с вершиной в начале координат имеет вид

$$(p^2-k)x^2+(q^2-k)y^2+(r^2-k)z^2+2qryz+2przx+2pqxy=0.$$

21.5. Докажите, что если конус

$$ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy=0$$

является прямым круговым, причём одно из чисел d, e, f равно нулю, то равно нулю ещё одно из этих чисел.

21.6. Докажите, что конус

$$ax^2+by^2+cz^2+2ezx=0,$$

где $e\neq 0$, является прямым круговым тогда и только тогда, когда $e^2=(a-b)(c-b)$.

21.7. Докажите, что если $def\neq 0$ и

$$a-\frac{ef}{d}=b-\frac{df}{e}=c-\frac{de}{f},$$

то конус

$$ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy=0$$

является прямым круговым.

21.8. Сечение прямого кругового конуса плоскостью, не параллельной его оси, спроецировано на плоскость, перпендикулярную оси конуса. Докажите, что ось конуса пересекает проекцию в фокусе.

§ 3. Произвольный конус

21.9. Докажите, что у любого конуса есть сечение, являющееся окружностью.

§ 4. Эллипсоид

Квадрику называют *эллипсоидом*, если в некоторой прямоугольной системе координат она задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Плоскость, пересекающую эллипсоид ровно в одной точке, называют *касательной плоскостью*.

21.10. Докажите, что уравнение плоскости, касающейся эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке (x_0, y_0, z_0), имеет вид

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

Замечание. Для квадрики $\sum a_{ij}x_ix_j=0$ касательная плоскость в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3) определяется уравнением $\sum a_{ij}\xi_i x_j=0$.

21.11. Докажите, что все сечения эллипсоида параллельными плоскостями подобны друг другу.

21.12. Пусть $0<a<b<c$. Докажите, что сечение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

представляет собой окружность тогда и только тогда, когда секущая плоскость имеет уравнение $x\sqrt{\alpha}\pm z\sqrt{\beta}=\lambda$, где $\alpha=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$, $\beta=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}$.

21.13. а) Длины главных осей эллипсоида попарно различны, O — центр эллипсоида. Докажите, что если точка A эллипсоида не лежит на главных осях, то существует ровно одно плоское сечение, для которого OA — главная полуось.

б) Плоскость

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0,$$

где $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ по эллипсу с длинами главных полуосей r_1 и r_2. Докажите, что числа r_1 и r_2 удовлетворяют уравнению

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2-r^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{b^2-r^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2-r^2}=0.$$

§ 5. Однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид

21.14. Найдите уравнение поверхности, заметаемой прямыми, пересекающими одновременно три прямые, заданные парами уравнений $x=0$ и $y=0$, $x=1$ и $z=1$, $y=1$ и $z=0$.

Поверхность из задачи 21.14 называют *однополостным гиперболоидом*. Согласно задаче 22.1 любые три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, можно привести к такому виду, как в условии задачи 21.14, поэтому в действительности мы рассматриваем не частный, а общий случай.

21.15. а) Найдите уравнение поверхности, заметаемой прямыми, пересекающими одновременно три прямые, заданные парами уравнений $y=0$ и $z=0$, $x=0$ и $z=1$, $x=y$ и $z=a$. (Данные прямые параллельны плоскости $z=0$.)

б) Докажите, что все прямые, пересекающие данные прямые, параллельны одной плоскости.

Поверхность из задачи 21.15 называют *гиперболическим параболоидом*. Косоугольную систему координат можно выбрать так, чтобы уравнение гиперболического параболоида имело вид $xy=z$ или $x^2-y^2=z$. Согласно задаче 22.2 любые три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, можно привести к такому виду, как в условии задачи 21.15, поэтому в действительности мы рассматриваем не частный, а общий случай.

Для любой тройки попарно скрещивающихся прямых, не параллельных одной плоскости, можно выбрать косоугольную систему координат так, чтобы они задавались именно такими уравнениями, как в задаче 21.14. Для любой тройки попарно скрещивающихся прямых, параллельных одной плоскости, можно выбрать косоугольную систему координат так, чтобы они задавались именно такими уравнениями, как в задаче 21.15. Поэтому любые три попарно скрещивающиеся прямые задают однополостный гиперболоид или гиперболический параболоид.

Если взять четыре попарно скрещивающиеся прямые, то четвёртая прямая не обязательно целиком лежит на гиперболоиде или параболоиде, заданном тремя первыми прямыми. Четыре попарно скрещивающиеся прямые называют *гиперболичными*, если все они лежат на одном и том же гиперболоиде или параболоиде. В стереометрии часто встречаются гиперболичные четвёрки прямых.

21.16. Докажите, что четыре попарно скрещивающиеся прямые гиперболичные тогда и только тогда, когда найдутся три попарно скрещивающиеся прямые, каждая из которых пересекает все четыре данные прямые.

21.17. Докажите, что если высоты тетраэдра $ABCD$ не пересекаются в одной точке, то они гиперболичные.

21.18. Рассмотрим точки, в которых сфера пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$ (рис. 21.1). Докажите, что прямые a, b, c и d, по которым пересекаются плоскости $A_bA_cA_d$ и BCD, $B_aB_cB_d$ и ACD, $C_aC_bC_d$ и ABD, $D_aD_bD_c$ и ABC, гиперболичные.

Замечание. Теорему Паскаля можно сформулировать следующим образом. *Рассмотрим точки, в которых коника пересекает стороны треугольника ABC* (рис. 21.2). *Тогда точки пересечения прямых A_bA_c и BC, B_aB_c и AC, C_aC_b и AB лежат на одной прямой.* Поэтому задачу 21.18 можно рассматривать как обобщение теоремы Паскаля.

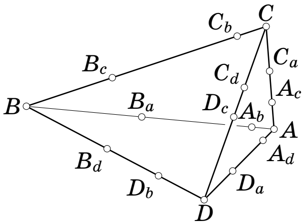


Рис. 21.1

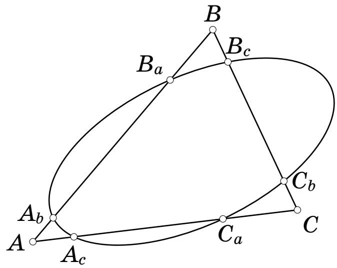


Рис. 21.2

21.19. Докажите, что прямая, пересекающая однополостный гиперболоид или параболический гиперболоид в трёх разных точках, целиком ему принадлежит.

Шестиугольник $ABCDEF$ называют *шестиугольником Брианшона*, если его диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке (возможно, бесконечно удалённой).

21.20. Докажите, что неплоский шестиугольник $ABCDEF$ является шестиугольником Брианшона тогда и только тогда, когда его стороны гиперболичные.

21.21. Докажите, что однополостный гиперболоид имеет ровно один центр симметрии.

Центр симметрии однополостного гиперболоида называют его *центром*.

21.22. Пусть пара скрещивающихся прямых лежит на однополостном гиперболоиде. Рассмотрим плоскость, которая параллельна этим прямым и равноудалена от них. Докажите, что она проходит через центр однополостного гиперболоида.

21.23. Докажите, что центр масс M тетраэдра $ABCD$ является серединой отрезка, соединяющего его центр O описанной сферы и центр Z гиперболоида, на котором лежат его высоты.

21.24. Докажите, что если прямая лежит на однополостном гиперболоиде, то прямая, симметричная ей относительно центра гиперболоида, тоже лежит на нём.

21.25. Докажите, что четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4 лежат на одном однополостном гиперболоиде тогда и только тогда, когда шесть плоскостей Π_{ij}, каждая из которых параллельна паре данных прямых l_i и l_j и равноудалена от них, пересекаются в одной точке.

21.26. Докажите, что тетраэдры $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ являются ортологическими тогда и только тогда, когда прямые, проведённые через вершины одного из них перпендикулярно противоположным граням другого, лежат на одном однополостном гиперболоиде.

§ 6. ГМТ

21.27. Найдите множество точек, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых.

§ 7. Свойства квадрик

21.28. Докажите, что проекция любого сечения квадрики $z=x^2+y^2$ на плоскость $z=0$ представляет собой окружность или прямую.

21.29. а) Докажите, что если две квадрики имеют общее плоское сечение, то у них есть ещё одно общее плоское сечение.

б) Докажите, что если три квадрики имеют общее плоское сечение, то три плоскости их других попарно общих сечений имеют общую прямую.

§ 8. Классификация квадрик

Можно указать следующие примеры квадрик:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (\textit{эллипсоид});$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (\textit{однополостный гиперболоид});$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (\textit{двуполостный гиперболоид});$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \quad (\textit{эллиптический параболоид});$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z \quad (\textit{гиперболический параболоид}).$$

Будем называть эти квадрики *невырожденными*.

Можно указать и другие примеры квадрик: конус, цилиндр, пара плоскостей (пересекающихся, параллельных или совпадающих). Такие квадрики мы будем называть *вырожденными*.

21.30. Докажите, что если квадрика не является конусом, цилиндром или парой плоскостей, то в некоторой косоугольной системе координат её уравнение является уравнением одной из невырожденных квадрик.

Решения

21.1. Перемещая сферу S, вписанную в данный цилиндр, вдоль оси цилиндра, мы видим, что она касается секущей плоскости в двух положениях S_1 и S_2. Пусть F_1 и F_2 — точки касания сфер S_1 и S_2 с секущей плоскостью. Возьмём произвольную точку M, принадлежащую сечению, и проведём через неё прямую, параллельную оси цилиндра. Эта прямая пересекает окружности C_1 и C_2, по которым сферы S_1 и S_2 касаются цилиндра, в точках A_1 и A_2. Отрезки MA_1 и MF_1 являются касательными к сфере S_1, поэтому $MF_1 = MA_1$. Аналогично $MF_2 = MA_2$. Следовательно, $MF_1 + MF_2 = MA_1 + MA_2 = A_1A_2$ — постоянная величина (расстояние между окружностями C_1 и C_2). Таким образом, точка M лежит на эллипсе (расположенном в секущей плоскости) с фокусами F_1 и F_2, для точек которого выполняется соотношение $MF_1 + MF_2 = A_1A_2$. Все точки сечения принадлежат этому эллипсу. Эллипс является замкнутой кривой, состоящей из одной связной компоненты, поэтому никаких других точек помимо точек сечения на эллипсе нет.

21.2. Пусть Π_1 — секущая плоскость, Π_2 — плоскость, проходящая через окружность касания конуса и сферы, касающейся образующих конуса и плоскости Π_1, F — точка касания сферы и плоскости Π_1. Обозначим через l прямую, по которой пересекаются плоскости Π_1 и Π_2. Возьмём точку X на пересечении поверхности конуса и плоскости Π_1 и спроектируем её на Π_2. В результате получим точку Y, а затем Y спроектируем на l и проекцию обозначим Z.

Угол YZX (обозначим его β) — это угол между плоскостями Π_2 и Π_1. Пусть S — вершина конуса. Тогда XS — образующая конуса и угол YXS равен углу α между образующей и осью конуса. Пусть W — точка пересечения прямой SX и плоскости Π_2.

Из треугольников XYW и XYZ получаем

$$\frac{XY}{XW} = \cos\alpha \quad \text{и} \quad \frac{XY}{XZ} = \sin\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Ясно, что $XW = XF$, так как это касательные к сфере, проведённые из одной точки. В итоге получаем, что отношение расстояний от точки X на кривой до фиксированной точки F и до фиксированной прямой l есть величина постоянная. Следовательно, эта кривая — эллипс, гипербола или парабола. Остаётся заметить, что если плоскость пересекает все образующие одной полы конуса, то получается ограниченная кривая, если все, кроме одной, то кривая состоит из одной компоненты, а если она пересекает обе полы конуса, то кривая состоит из двух компонент.

21.3. Соединим точку X с вершиной S конуса. Пусть W_1 и W_2 — точки на прямой XS, принадлежащие первой и второй сфере соответственно. Тогда $XF_1 = XW_1$, так как эти отрезки — две касательные, проведённые из точки X к первой сфере, и $XF_2 = XW_2$. Таким образом, $XF_1 + XF_2 = W_1W_2$, а эта величина постоянна.

21.4. Пусть направление оси конуса задано вектором (p, q, r). Косинус угла между векторами (p, q, r) и (x, y, z) равен

$$\frac{px+qy+rz}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Множество точек (x, y, z), для которых этот косинус с точностью до знака один и тот же, задаётся уравнением вида

$$(px+qy+rz)^2 = k(x^2+y^2+z^2).$$

21.5. Согласно задаче 21.4 числа d, e, f имеют вид qr, pr, pq. Если одно из этих чисел равно нулю, то равно нулю одно из чисел p, q, r, а тогда равно нулю ещё одно из чисел qr, pr, pq.

21.6. Предположим сначала, что конус $ax^2+by^2+cz^2+2ezx=0$ является прямым круговым. Согласно задаче 21.4 имеем $q=0$, $b=-k$, $a=p^2-k$ и $c=r^2-k$. Поэтому $(a-b)(c-b)=p^2r^2=e^2$.

Предположим теперь, что $e^2=(a-b)(c-b)$. Пусть $k=-b$. По условию $(a+k)(c+k)=g^2>0$, поэтому числа $a+k$ и $c+k$ либо оба положительны, либо оба отрицательны. Поменяв при необходимости знаки всех коэффициентов уравнения конуса, можно считать, что числа $a+k$ и $c+k$ положительны. Положим $p=\pm\sqrt{a+k}$, $q=0$, $r=\pm\sqrt{c+k}$. По условию $pr=\pm e$. Знаки можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство $pr=e$. Тогда уравнение конуса приводится к такому виду, как указано в задаче 21.4.

21.7. Положим $k=-a+\frac{ef}{d}$. Тогда $a+k=\frac{ef}{d}$, $b+k=\frac{df}{e}$, $c+k=\frac{de}{f}$. Поэтому

$$(a+k)(b+k) = f^2 > 0, \quad (b+k)(c+k) = d^2, \quad (c+k)(a+k) = e^2 > 0.$$

Таким образом, числа $a+k$, $b+k$, $c+k$ одного знака; поменяв при необходимости знаки коэффициентов уравнения конуса, можно считать, что эти числа положительные. Заметим, что в таком случае число $def=(a+k)(b+k)(c+k)$ тоже положительное. Положим $p=\sqrt{a+k}$, $q=\pm\sqrt{b+k}$, $r=\pm\sqrt{c+k}$, где знаки выбираются так, чтобы выполнялись равенства $pq=f$ и $pr=e$. Тогда $qr=\pm d$. Следовательно, $p^2q^2r^2=\pm def$. Но $def>0$, поэтому $qr=d$, и мы получаем представление уравнения конуса в таком виде, как указано в задаче 21.4.

21.8. Можно считать, что вершина конуса расположена в начале координат, а его ось направлена по оси Oz. Тогда уравнение конуса имеет вид $z=k\sqrt{x^2+y^2}$. После поворота координатной плоскости Oxy можно считать, что уравнение секущей плоскости имеет вид $z=ax+b$. Таким образом, проекция сечения конуса на координатную плоскость Oxy задаётся уравнением $k\sqrt{x^2+y^2}=ax+b$. Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+\frac{b}{a}} = \frac{a}{k}.$$

Последнее уравнение задаёт конику с фокусом в начале координат, директрисой $x=-\frac{b}{a}$ и эксцентриситетом $\left|\frac{a}{k}\right|$ (отношение расстояния от точки до фокуса к расстоянию от точки до директрисы равно эксцентриситету).

21.9. Пусть для определённости конус задан уравнением $ax^2+by^2+cz^2=0$, где $a \geqslant b \geqslant c$. Сложив уравнение конуса с уравнением

$$(b-a)(x-a_1)^2+(b-c)(z-c_1)^2=0,$$

задающим пару плоскостей, получим уравнение

$$b(x^2+y^2+z^2)+2(a-b)a_1x+2(c-b)c_1z=(a-b)a_1^2+(c-b)c_1^2.$$

Числа $a-b$ и $c-b$ разного знака, поэтому a_1 и c_1 можно выбрать так, что число $(a-b)a_1^2+(c-b)c_1^2$ имеет такой же знак, как и число b, т. е. полученное уравнение задаёт сферу. Легко проверить, что при этом точка $(a_1, 0, c_1)$, принадлежащая обеим плоскостям, лежит внутри сферы. Таким образом, сечение конуса рассматриваемой парой плоскостей совпадает с сечением сферы этой парой плоскостей и представляет собой пару окружностей.

21.10. Пусть точка (x, y, z) принадлежит эллипсоиду и рассматриваемой плоскости, т. е. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$. Тогда

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1-2+1=0,$$

а значит, $(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)$.

21.11. Можно считать, что уравнения секущих плоскостей имеют вид $z=\lambda$. Тогда сечение квадрики

$$ax^2+bxy+cy^2+d+(a_1x+b_1y+c_1)z+a_2z^2=0$$

представляет собой конику

$$ax^2+bxy+cy^2+\lambda a_1x+\lambda b_1y+a_2\lambda^2+c_1\lambda+d=0.$$

В случае эллипсоида эта коника является эллипсом (если она непуста и не вырождается в точку). Направление осей эллипса и отношение их длин полностью определяются квадратичной частью $ax^2+bxy+cy^2$.

21.12. Согласно задаче 21.11 достаточно рассмотреть случай, когда секущая плоскость проходит через начало координат. Предположим, что такое сечение представляет собой окружность радиуса r. Тогда точки этой окружности лежат на сфере $x^2+y^2+z^2=r^2$. А так как эти точки лежат на эллипсоиде, то они лежат на поверхности

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0. \qquad (1)$$

В том случае, когда коэффициенты при x^2, y^2 и z^2 ненулевые, поверхность (1) представляет собой конус (или одну точку). Поэтому окружность с центром в начале координат может лежать на поверхности (1) лишь в том случае, когда один из коэффициентов $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}$ и $\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}$ равен нулю, а два других имеют различные знаки. Учитывая, что $0<a<b<c$, находим $r=b$.

21.13. а) Точка A эллипса с центром O лежит на его главной оси тогда и только тогда, когда окружность радиуса OA с центром O касается эллипса.

Пересечение данного эллипсоида со сферой радиуса OA с центром O является конусом

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)z^2=0, \tag{1}$$

где $r=OA$. Искомая секущая плоскость однозначно определяется как плоскость, касающаяся конуса по лучу OA.

б) Пусть OA_1 и OA_2 — главные полуоси эллипса, полученного в сечении эллипсоида плоскостью $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$. В тех случаях, когда $A=A_1$ или A_2 (т. е. $r=r_1$ или r_2), эта плоскость должна касаться конуса (1). Несложно проверить, что последнее условие эквивалентно равенству

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2-r^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{b^2-r^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2-r^2}=0.$$

21.14. Возьмём точку $(0, 0, z_0)$ на первой прямой и проведём плоскость через эту точку и вторую прямую. Эта плоскость задаётся уравнением $z=z_0+$ $+(1-z_0)x$. Она пересекает третью прямую в точке $\left(\frac{z_0}{z_0-1}, 1, 0\right)$. Поэтому прямая, проходящая через точку $(0, 0, z_0)$ и пересекающая вторую и третью прямые, — это прямая, соединяющая точки $(0, 0, z_0)$ и $\left(\frac{z_0}{z_0-1}, 1, 0\right)$. Она задаётся уравнениями

$$\frac{x-0}{x-\frac{z_0}{z_0-1}}=\frac{y-0}{y-1}=\frac{z-z_0}{z-0},$$

т. е. $x(z_0-1)=yz_0$ и $yz_0+z=z_0$. Выразим z_0 из второго уравнения и подставим это выражение в первое уравнение. В результате получим требуемое уравнение

$$x\left(\frac{z}{1-y}-1\right)=y\frac{z}{1-y},$$

т. е. $xz+xy-yz-x=0$.

З а м е ч а н и е. Параллельные прямые мы здесь тоже считаем пересекающимися в бесконечно удалённой точке; иначе из этой поверхности нужно будет исключить три прямые, параллельные данным прямым.

21.15. а) Выберем на первой прямой точку $(x_0, 0, 0)$ и проведём плоскость через эту точку и вторую прямую. Эта плоскость задаётся уравнением $x+x_0z=x_0$. Она пересекает третью прямую в точке $(x_0(1-a), x_0(1-a), a)$. Прямая, соединяющая точки $(x_0, 0, 0)$ и $(x_0(1-a), x_0(1-a), a)$, задаётся уравнениями

$$\frac{x-x_0}{-ax_0}=\frac{y}{x_0-ax_0}=\frac{z}{a}. \tag{1}$$

Выразив x_0 из одного уравнения и подставив это выражение в другое уравнение, получим $ay=z(x(1-a)-ay)$. Это и есть требуемое уравнение поверхности.

б) Уравнение (1) показывает, что прямая, пересекающая три данные прямые, параллельна вектору $(-ax_0, x_0-ax_0, a)=x_0(-a, 1-a, 0)+(0, 0, a)$. Все такие векторы параллельны плоскости, натянутой на векторы $(-a, 1-a, 0)$ и $(0, 0, a)$.

21.16. Воспользуемся задачами 21.14 и 21.15. Предположим сначала, что прямые a, b, c и d лежат на одном гиперболоиде или параболоиде. Тогда любая прямая, пересекающая прямые a, b и c, пересекает и прямую d.

Предположим теперь, что существуют попарно скрещивающиеся прямые l_1, l_2 и l_3, каждая из которых пересекает прямые a, b, c и d. Рассмотрим гиперболоид или параболоид, содержащий прямые a, b и c. Он содержит прямые l_1, l_2 и l_3. Ясно также, что гиперболоид или параболоид, содержащий прямые l_1, l_1, l_3, содержит прямую d.

21.17. Плоскости, проходящие через ребра DA, DB и DC перпендикулярно граням DBC, DAC и DAB соответственно, имеют общую прямую l_d (задача 6.18). Прямая l_d пересекает высоты, проведённые из вершин A, B и C. Кроме того, она пересекает (в точке D) высоту, проведенную из вершины D. Аналогично можно построить прямые l_a, l_b и l_c, которые пересекают все высоты тетраэдра. Остаётся воспользоваться критерием гиперболичности четвёрки прямых, приведённым в задаче 21.16.

21.18. Рассмотрим плоскость BCD. Согласно теореме Паскаля точки $X_b = B_cB_d \cap C_dD_c$, $X_c = C_bC_d \cap B_dD_b$ и $X_d = D_bD_c \cap C_bB_c$ лежат на одной прямой l_a (рис. 21.3). Прямая l_a пересекает прямую a, так как обе эти прямые лежат в плоскости BCD. Кроме того, прямая l_a пересекает прямые b, c и d в точках X_b, X_c и X_d соответственно. Аналогично можно построить прямые l_b, l_c и l_d,

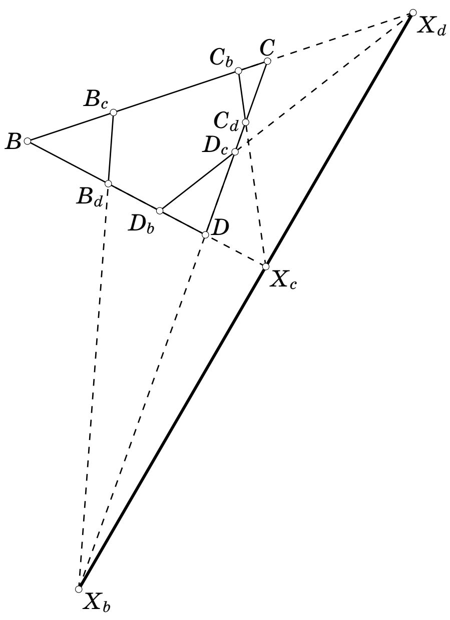


Рис. 21.3

каждая из которых пересекает прямые a, b, c и d. Остаётся воспользоваться критерием гиперболичности четвёрки прямых, приведённым в задаче 21.16.

21.19. Зададим прямую параметрически: $x = a_0 + at$, $y = b_0 + bt$, $z = c_0 + ct$. Подставив эти выражения в уравнение гиперболоида или параболоида, получим для t уравнение степени не выше 2. Если такое уравнение имеет три корня, то оно выполняется для всех t.

21.20. Предположим, что диагонали неплоского шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке. Покажем, что тогда прямая AB принадлежит гиперболоиду или параболоиду, содержащему прямые BC, DE и AF. Согласно задаче 21.19 для этого достаточно доказать, что прямая AB пересекает прямую DE (прямые BC и AF она пересекает в точках B и A, соответственно). По условию прямые AD и BE пересекаются, а значит, точки A, B, D и E лежат в одной плоскости. Следовательно, прямые AB и DE пересекаются. Аналогично доказывается, что прямые CD и EF принадлежат рассматриваемому гиперболоиду.

Предположим теперь, что прямые AB, CD и EF принадлежат гиперболоиду или параболоиду, содержащему прямые BC, DE и AF. Тогда прямая AB пересекает прямую DE, поэтому прямые AD и BE пересекаются. Аналогично доказывается, что прямые AD, BE и CF попарно пересекаются. Но по условию эти прямые не лежат в одной плоскости, а значит, все они должны пересекаться в одной точке.

21.21. Сделаем замену координат $x = x' + a$, $y = y' + b$ и $z = z' + c$. В новых координатах уравнение однополостного гиперболоида принимает вид

$$(x' + a)(z' + c) + (x' + a)(y' + b) - (y' + b)(z' + c) - x' - a = 0.$$

В новых координатах точка $(0, 0, 0)$, которая соответствует точке (a, b, c) в исходных координатах, является центром однополостного гиперболоида тогда и только тогда, когда в полученном уравнении отсутствует линейный член $(b + c - 1)x' + (a - c)y' + (a - b)z'$, т. е. $b + c = 1$, $a = c$ и $a = b$. В результате получаем $a = b = c = \dfrac{1}{2}$.

21.22. Вычисления, приведённые в решении задачи 21.21, показывают, что это верно для любой пары из трёх скрещивающихся прямых, задающих рассматриваемый однополостный гиперболоид. Но если мы берём произвольную пару скрещивающихся прямых на однополостном гиперболоиде и ещё одну скрещивающуюся с ними прямую на том же гиперболоиде, то, подходящим образом выбрав косоугольную систему координат, мы можем считать, что мы имеем дело именно с такими тремя прямыми (т. е. проходящими через рёбра куба).

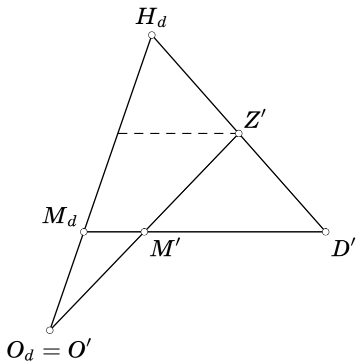


Рис. 21.4

21.23. Пусть D', Z', M' и O' — проекции точек D, Z, M и O на плоскость грани ABC. Пусть, далее, O_d, H_d и M_d — центр описанной окружности, точка пересечения высот и точка пересечения медиан треугольника ABC. Ясно, что точки O' и O_d совпадают. Докажем, что рассматриваемые точки образуют конфигурацию такого вида, как на рис. 21.4, а именно, точка M_d лежит на отрезке O_dH_d и делит его в отношении $O_dM_d : M_dH_d = 1:2$, а точка Z' является серединой отрезка H_dD'. Первое свойство — это обычное свойство прямой Эйлера треугольника (см. «Задачи по планиметрии»). Нужно доказать лишь второе свойство.

Пусть A' — проекция точки A на плоскость BCD. Прямые AA' и AH_d перпендикулярны прямой BC, поэтому плоскость $AA'H_d$ перпендикулярна прямой BC, а значит, она перпендикулярна плоскости ABC. Следовательно, прямая AH_d является проекцией прямой AA' на плоскость ABC. Ясно также, что проекцией прямой DD' на эту плоскость является точка D'. Согласно задаче 21.22 точка Z лежит в плоскости, которая параллельна прямым AA' и DD' и равноудалена от них. При проекции на плоскость ABC эта плоскость переходит в прямую, которая проходит через середину отрезка H_dD' параллельно прямой AH_d. Рассуждая аналогично для прямых BB' и CC', получаем, что точка Z' является серединой отрезка H_dD', поскольку три построенные прямые пересекаются в середине этого отрезка.

Из доказанных свойств рассматриваемой конфигурации точек легко следует, что точка M' является серединой отрезка $O'Z'$. Такое же свойство выполняется для проекций точек M, O и Z на все плоскости граней тетраэдра, поэтому M — середина отрезка OZ.

21.24. Снова достаточно рассмотреть случай, когда однополостный гиперболоид задан тремя скрещивающимися прямыми l_1, l_2 и l_3, содержащими рёбра куба. В таком случае прямая l, симметричная прямой l_1 относительно центра куба, пересекает прямые l_2 и l_3 и параллельна прямой l_1. Но параллельные прямые мы тоже считаем пересекающимися (в бесконечно удалённой точке). Поэтому прямая l принадлежит гиперболоиду.

21.25. Если данные прямые лежат на одном однополостном гиперболоиде, то рассматриваемые плоскости проходят через его центр согласно задаче 21.22.

Предположим теперь, что шесть плоскостей Π_{ij} пересекаются в одной точке. Пусть O — точка пересечения плоскостей Π_{12}, Π_{13} и Π_{23}. Согласно задаче 21.22 точка O является центром однополостного гиперболоида, заданного прямыми l_1, l_2 и l_3. По условию плоскости Π_{14}, Π_{24} и Π_{34} тоже проходят через точку O. Из этого следует, что прямые l_1', l_2' и l_3', симметричные прямым l_1, l_2 и l_3 относительно точки O, пересекают прямую l_4. Согласно задаче 21.24 прямые l_1', l_2' и l_3' лежат на рассматриваемом гиперболоиде. Каждая из прямых l_1', l_2' и l_3' пересекает все прямые l_1, l_2, l_3, l_4. Следовательно, прямая l_4 тоже лежит на рассматриваемом гиперболоиде (задача 21.16).

21.26. Пусть l_a и l_b — прямые, проведённые через вершины A и B перпендикулярно плоскостям $B_1C_1D_1$ и $A_1C_1D_1$. Обе эти прямые перпендикулярны прямой C_1D_1, т.е. они параллельны плоскости, перпендикулярной ребру

C_1D_1. Таким образом, плоскость, проходящая через середину ребра AB перпендикулярно ребру C_1D_1, параллельна прямым l_a и l_b и равноудалена от них. Согласно задаче 21.25 проведённые плоскости пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда проведённые прямые лежат на одном однополостном гиперболоиде.

21.27. Выберем систему координат так, чтобы начало координат находилось в середине общего перпендикуляра к данным прямым, а ось Ox была направлена по общему перпендикуляру. Можно также считать, что оси Oy и Oz образуют равные углы с данными прямыми. Тогда данные прямые задаются уравнениями, которые формально можно записать следующим образом:

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{\cos\alpha}=\frac{z}{\sin\alpha},\quad \frac{x+a}{0}=\frac{y}{-\cos\alpha}=\frac{z}{\sin\alpha}.$$

Поэтому согласно задаче 1.37 искомое множество точек задаётся уравнением

$$\begin{vmatrix} y & z\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x-a\\ \sin\alpha & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-a & y\\ 0 & \cos\alpha\end{vmatrix}^2=$$
$$=\begin{vmatrix} y & z\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x+a\\ \sin\alpha & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x+a & y\\ 0 & -\cos\alpha\end{vmatrix}^2.$$

После несложных преобразований получаем уравнение $yz\sin\alpha\cos\alpha=ax$. Это уравнение задаёт гиперболический параболоид.

21.28. Уравнение секущей плоскости можно записать либо в виде $z=ax+$ $+by+c=0$, либо в виде $ax+by+c=0$. В первом случае проекция сечения задаётся уравнением $x^2+y^2=ax+by+c$, а во втором — уравнением $ax+by+c=0$.

21.29. а) Пусть $f=0$ и $g=0$ — уравнения квадрик, $l=0$ — уравнение плоскости, содержащей их общее плоское сечение. В плоскости $l=0$ уравнения $f=0$ и $g=0$ задают одну и ту же кривую, поэтому $f=\lambda g+lm$, где m — некоторая линейная функция. Плоскость $m=0$ тоже содержит общее плоское сечение квадрик $f=0$ и $g=0$.

б) Пусть рассматриваемые квадрики имеют уравнения $f=0$, $g=0$, $h=0$. Согласно п. а) можно считать, что $g=f+lm_1$ и $h=f+lm_2$. В таком случае $g=h+l(m_1-m_2)$. Это означает, что плоскости других общих сечений задаются уравнениями $m_1=0$, $m_2=0$ и $m_1=m_2$. Третье уравнение является линейной комбинацией двух первых, поэтому три плоскости имеют общую прямую.

21.30. Заменами координат квадратичную часть уравнения квадрики можно привести к виду $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2$. Рассматривая отдельно случаи, когда числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ отличны от нуля и когда одно или два из них равно нулю, получаем требуемое.

ГЛАВА 22

АФФИННЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Аффинные преобразования

Аффинное преобразование пространства — это невырожденное отображение, переводящее точку с координатами (x, y, z) в точку с координатами (x', y', z'), где

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14},$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24},$$
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}.$$

Невырожденность этого отображения означает, что выполняется одно из следующих эквивалентных свойств:

— образом отображения служит всё пространство;

— образы некоторых четырёх точек не лежат в одной плоскости;

— образы любых четырёх точек, не лежащих в одной плоскости, не лежат в одной плоскости.

Аффинное преобразование переводит прямую в прямую, а плоскость — в плоскость.

При аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные прямые и сохраняются отношения длин отрезков, лежащих на параллельных прямых. Сохраняются также отношения объёмов фигур. Прямые, параллельные одной плоскости, переходят в прямые, параллельные образу этой плоскости.

Из линейности формул для аффинного преобразования видно, что его можно определить не только для точек, но и для векторов, т. е. образ вектора не зависит от того, к какой точке он приложен. Аффинным преобразованием можно перевести любые три вектора, не параллельные одной плоскости, в любые другие три вектора, не параллельные одной плоскости.

Любой тетраэдр аффинным преобразованием можно перевести в любой другой тетраэдр. Любой параллелепипед аффинным преобразованием можно перевести в любой другой параллелепипед.

22.1. Докажите, что любые три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, аффинным преобразованием можно перевести в прямые, заданные парами уравнений $x = 0$ и $y = 0$, $x = 1$ и $z = 1$, $y = 1$ и $z = 0$.

22.2. Докажите, что любые три попарно скрещивающиеся прямые, параллельные одной плоскости, аффинным преобразованием можно перевести в прямые, заданные парами уравнений $y=0$ и $z=0$, $x=0$ и $z=1$, $x=y$ и $z=a$.

22.3. Докажите, что любой эллипсоид аффинным преобразованием можно перевести в шар.

См. также задачу 2.24.

§ 2. Центральная проекция

Центральной проекцией точки A из точки O на плоскость P называют точку A', в которой прямая OA пересекает плоскость P.

22.4. Какими фигурами может быть центральная проекция треугольника из точки O, не лежащей в его плоскости?

§ 3. Проективные преобразования

Проективное преобразование пространства — это невырожденное отображение, переводящее точку с координатами (x, y, z) в точку с координатами (x', y', z'), где

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$
$$y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$
$$z' = \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}.$$

Невырожденность этого отображения означает, что выполняется одно из следующих эквивалентных свойств:

- образом отображения служит всё пространство;
- образы некоторых четырёх точек не лежат в одной плоскости;
- образы любых четырёх точек, не лежащих в одной плоскости, не лежат в одной плоскости.

Приведённое выше определение проективного преобразования не вполне точно. Дело в том, что для точек плоскости

$$a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0$$

нам приходится делить на нуль, что невозможно. В действительности проективное преобразование определено для точек *проективного пространства*, т. е. пространства, пополненного бесконечно удалённой плоскостью, и проективное преобразование может переводить бесконечно удалённые точки в обычные (конечные) точки и наоборот. И когда конечная точка переходит в бесконечно удалённую, нам как раз и приходится делить на нуль.

Формально проективное пространство можно определить как множество точек с координатами $(x:y:z:t)$, причём эти координаты определены с точностью до пропорциональности, т. е. для любого $a\neq 0$ наборы $(x:y:z:t)$ и $(ax:ay:az:at)$ задают одну и ту же точку (такие координаты полностью аналогичны барицентрическим координатам). Наборы $(x:y:z:t)$, для которых $t\neq 0$, соответствуют обычным точкам пространства. Действительно, поделив все координаты на t, мы перейдём к набору $(x:y:z:1)$, и теперь уже (x, y, z) — это обычные координаты. А наборы $(x:y:z:t)$, для которых $t=0$, соответствуют бесконечно удалённым точкам. Бесконечно удалённую точку $(x_0:y_0:z_0:0)$ можно понимать как точку, в которой пересекаются прямые, параллельные вектору (x_0, y_0, z_0). Действительно, каждая из таких прямых состоит из точек вида $(ax_0+x_1:ay_0+y_1:az_0+z_1:1)$. Поделив все координаты на a и перейдя к пределу $a\to\infty$, получим точку $(x_0:y_0:z_0:0)$. Тем самым, эта бесконечно удалённая точка лежит на всех рассматриваемых прямых.

Правильное определение проективного преобразования такое: это невырожденное отображение проективного пространства, переводящее точку с координатами $(x:y:z:t)$ в точку с координатами $(x':y':z':t')$, где

$$\begin{aligned}
x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t,\\
y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t,\\
z' &= a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t,\\
t' &= a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t.
\end{aligned}$$

На языке барицентрических координат введение бесконечно удалённых точек эквивалентно рассмотрению систем точек с нулевой суммарной массой; центры масс таких систем точек соответствуют бесконечно удалённым точкам.

22.5. Докажите, что при аффинном преобразовании бесконечно удалённая плоскость переходит в себя.

22.6. Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее данную плоскость в бесконечно удалённую плоскость.

22.7. Докажите, что если при проективном преобразовании ни одна точка сферы S не переходит в бесконечно удалённую точку, то эта сфера переходит в поверхность эллипсоида.

22.8. Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее данную сферу S в некоторую сферу, а данную плоскость, не пересекающую S, в бесконечно удалённую плоскость.

Решения

22.1. Проведём через каждую прямую две плоскости, параллельные остальным прямым. Полученные шесть плоскостей образуют параллелепипед, причём данные прямые содержат три ребра этого параллелепипеда. Указанные в условии задачи прямые содержат три ребра куба. Полученный ранее параллелепипед аффинным преобразованием можно перевести в этот куб так, чтобы три выделенных ребра параллелепипеда перешли в три выделенных ребра куба.

22.2. Пусть l_1, l_2, l_3 — данные прямые. Проведём через них параллельные плоскости Π_1, Π_2, Π_3. Выберем на прямой l_1 произвольную точку A и проведём через точку A и прямую l_3 плоскость Π. Плоскость Π не может быть параллельна плоскости Π_2, поскольку иначе она должна была бы совпасть как с плоскостью Π_1, так и с плоскостью Π_2. Поэтому плоскости Π_2 и Π пересекаются по некоторой прямой l_3', параллельной прямой l_3. Прямые l_2 и l_3' лежат в плоскости Π_2 и не параллельны, поэтому они пересекаются в некоторой точке B. Прямая A_1B пересекает все три данные прямые. Рассмотрим аффинное преобразование, которое переводит прямые l_1, l_2 и A_1B в прямую, заданную парой уравнений $x=0$ и $z=1$, и в оси Ox и Oz. Применив растяжение вдоль оси Oy, мы сможем привести третью прямую к требуемому виду.

22.3. Для эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ нужно применить аффинное преобразование $x'=\frac{x}{a}$, $y'=\frac{y}{b}$, $z'=\frac{z}{c}$.

22.4. Пусть ABC — данный треугольник. Рассмотрим полный трёхгранный угол $OABC$ с вершиной O, состоящий из двух трёхгранных углов (рёбрами одного угла являются лучи OA, OB, OC, а рёбрами другого — их продолжения). Проекция треугольника ABC на плоскость P совпадает с пересечением плоскости P и полного трёхгранного угла $OABC$. В зависимости от взаимного расположения плоскости и трёхгранного угла возникают следующие варианты.

1. Плоскость P параллельна двум рёбрам и пересекает третье. В проекции получается угол.

2. Плоскость P параллельна одному ребру и пересекает два других, причём оба — с одной стороны от вершины O. В проекции получается полоса, ограниченная двумя параллельными прямыми и пересекающей их третьей прямой.

3. Плоскость P параллельна одному ребру и пересекает два других, причём по разные стороны от вершины O. В проекции получаются два угла, у которых сторона одного служит продолжением стороны другого, а две другие стороны параллельны и противоположно направлены.

4. Плоскость P пересекает все три ребра, причём все три — с одной стороны от вершины O. В проекции получается треугольник.

5. Плоскость P пересекает все три ребра, причём два — с одной стороны от вершины O, а одно — с другой. В проекции получается фигура, состоящая из угла и бесконечной фигуры, которая ограничена продолжениями сторон этого угла и прямой, их пересекающей.

22.5. Аффинное преобразование является частным случаем проективного преобразования. Действительно, если в определении проективного преобразования мы положим $t'=t$, то получим как раз определение аффинного преобразования. Бесконечно удалённая плоскость задаётся уравнением $t = 0$. Она переходит в бесконечно удалённую плоскость $t' = 0$.

22.6. Если плоскость задана уравнением

$$a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0,$$

то нужно рассмотреть проективное преобразование, для которого

$$t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t.$$

22.7. При проективном преобразовании невырожденная квадрика переходит в невырожденную квадрику, а любая невырожденная квадрика, не содержащая бесконечно удалённых точек, является эллипсоидом.

22.8. Рассмотрим проективное преобразование, переводящее данную плоскость в бесконечно удалённую плоскость (такое преобразование существует согласно задаче 22.6). Согласно задаче 22.7 данная сфера переходит в поверхность эллипсоида. Сделаем аффинное преобразование, переводящее этот эллипсоид в сферу (задача 22.3). Остаётся заметить, что при аффинном преобразовании бесконечно удалённая плоскость переходит в себя (задача 22.5).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

Виктор Васильевич Прасолов

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

Подписано к печати 26.06.2010 г. Формат $70 \times 90/16$. Печать офсетная. Объем 22 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел.: (499) 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ГУП «Типография „Наука“». 199034, Санкт-Петербург, В. О., 9 линия, 12.